Lösung 1:

(a)

$$u^{(3)}(x_i) \approx \frac{1}{2\,h^3}\,(u_{i+2} - 2\,u_{i+1} + 2\,u_{i-1} - u_{i-2})$$

(b)

$$\begin{pmatrix} u^{(3)}(x_1) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u^{(3)}(x_N) \end{pmatrix} \approx \frac{1}{2\,h^3} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & -2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

Dabei sind die ersten und letzten beiden Zeilen nicht vollständig.

Lösung 2:

(a) Möglich ist es, da die angegebene Funktion auf die geforderten Randbedingungen passt. Es ist dann

$$g(x) = x^3 - 2\,x + 4\,.$$

(b) Wir setzen $u(x) = A\,\sin(\omega\,x + \varphi)$ an und wählen Paramter so, dass die Randbedingungen erfüllt sind. Dies hier ist eine Möglichkeit. Es gibt natürlich mehrere Varianten.

$$\begin{aligned} u(0) &= A\,\sin(\varphi) = 0 && \Rightarrow && \varphi = 0 \\ u'(x) &= \omega\,A\cos(\omega\,x) && && \\ u'(1) &= \omega\,A\cos(\omega) = -2 && \Rightarrow && \cos(\omega) = \frac{-2}{\omega\,A} \end{aligned}$$

Wir wählen $\omega = \frac{\pi}{4}$, dann ist $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und damit gilt dann

$$\begin{aligned} && \omega &= \frac{\pi}{4} \\ && \cos(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-2}{\omega\,A} \\ \Leftrightarrow && A &= \frac{-8\sqrt{2}}{\pi} \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir dann eine Funktion, die die Randbedingungen erfüllt:

$$u(x) = \frac{-8\sqrt{2}}{\pi}\,\sin\left(\frac{\pi}{4}\,x\right)\,,\ u(0) = 0\,,\ u'(1) = -2$$

Damit diese Funktion in die Differentialgleichung passt wählen wir eine entsprechende rechte Seite g bei den Gleichungen.

$$\begin{aligned}
u(x) &= \frac{-8\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \\
u'(x) &= -2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \\
u''(x) &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \\
\Rightarrow \qquad g(x) &= -2\,u''(x) + u'(x) - x\,u(x) \\
&= -2\,\frac{\pi}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) - x\,\frac{-8\sqrt{2}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)
\end{aligned}$$

Kurzum:

$$\boxed{g(x) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}(4\,x - \pi^2)\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}$$

(c) Dirichletrand (links), erste Zeile im System

$$u(0) = u(x_1) = u_1 = (1\,,\,0\,,\,\cdots\,,\,0)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{DIM}\end{pmatrix} = 0$$

Neumannrand (rechts), letzte, bzw. DIM-te Zeile im System:

$$\begin{aligned}
u'(1) = u'(x_{DIM}) &\approx \frac{u(x_{DIM}) - u(x_{DIM-1})}{h} \\
&= \frac{1}{h}(0\,,\,\cdots\,,\,0\,,\,-1\,,\,1)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{DIM}\end{pmatrix} = -2
\end{aligned}$$

(d) $x = (0, 0.33, 0.67, 1)$, $h = 0.33$

$$\frac{1}{2\,h^2}\begin{pmatrix} 2\,h^2 & 0 & 0 & 0 \\ -(4+h) & (8+2\,h^2\,x_2) & -(4-h) & 0 \\ 0 & -(4+h) & (8+2\,h^2\,x_3) & -(4-h) \\ 0 & 0 & -2\,h & 2\,h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g_2 \\ g_3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Tipp: Überlegen Sie sich zunächst die einzelnen Matrizen und addieren Sie diese mit den entsprechenden Faktoren auf.

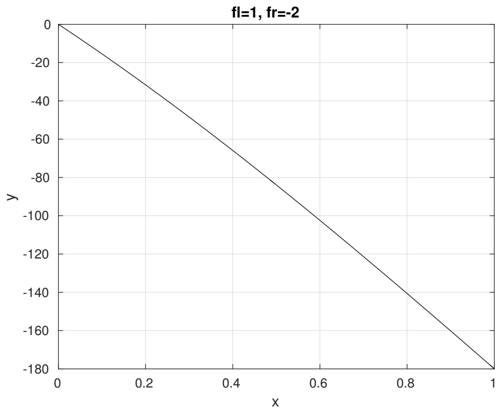
Jetzt noch ein wenig genauer, wo wir gerade dabei sind:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{39}{2} & \frac{109}{3} & -\frac{33}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{39}{2} & \frac{110}{3} & -\frac{33}{2} \\ 0 & 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4.72 \\ -5.69 \\ -2 \end{pmatrix}$$

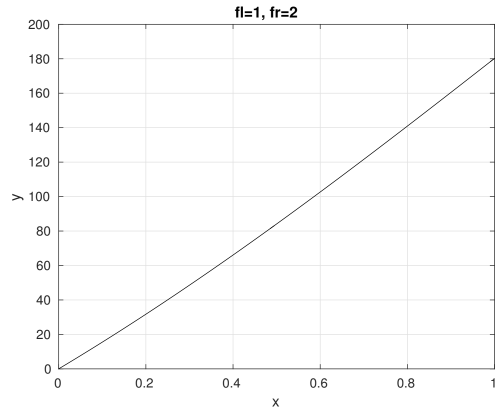
Lösung 3:

In `NumDiff/DiffusionEquation.m` oder `NumDiff/MyFD.m`:

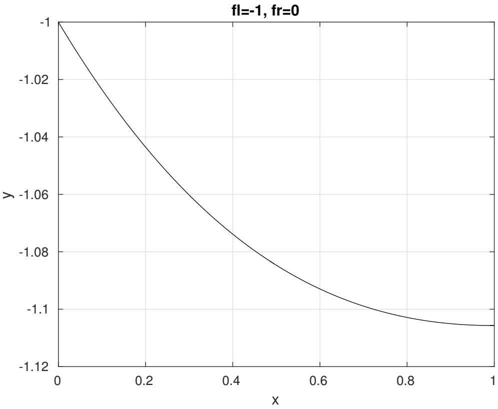
```
a0 = -1; a1 = 1; a2 = -2;
rhs = @(x) sin(x);
fl = 0; fr = -2;
fex = @(x) 0;
```



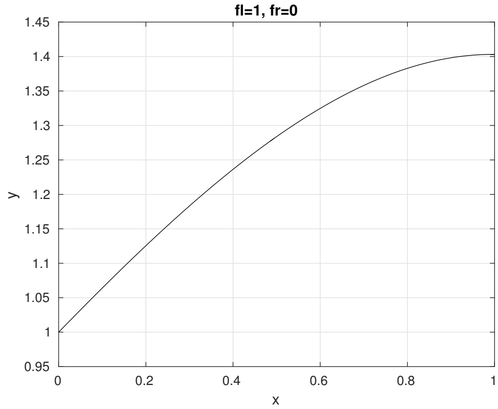
fl=1, fr=-2



fl=1, fr=2



fl=-1, fr=0



fl=1, fr=0