# Blatt 9: Finite Differenzen-Methode **MNEU**

**(Theorieteil)**

**Aufgabe 1 :**

(a) Überlegen Sie sich mal eine diskrete dritte Ableitung, so dass jeweils gleichermaßen Vorwärts- wie Rückwärtsdifferenzenquotienten auftreten.

(b) Wie lautet die entsprechende Matrix-Vektor-Darstellung?

**Aufgabe 2 :**

Es sei das RWP

$$-2\,u'' + u' - x\,u = g\,,\ u(0) = 0\,,\ u'(1) = -2$$

gegeben.

(a) Die Funktion

$$u(x) = -x^2$$

soll die exakte Lösung sein. Ist das möglich? Und wenn ja, wie ist dann $g$ zu wählen?

(b) Sie wollen einen EOC-Test mit trigonometrischen Funktionen, etwa der Sinuskurve $u_{\text{ex}}(x) = A\,\sin(\omega\,x + \varphi)$. Wie könnten die Parameter $A$, $\omega$ und $\varphi$ gewählt werden? (Die Lösung ist nicht eindeutig) Und wie lautet dann die rechte Seite $g$?

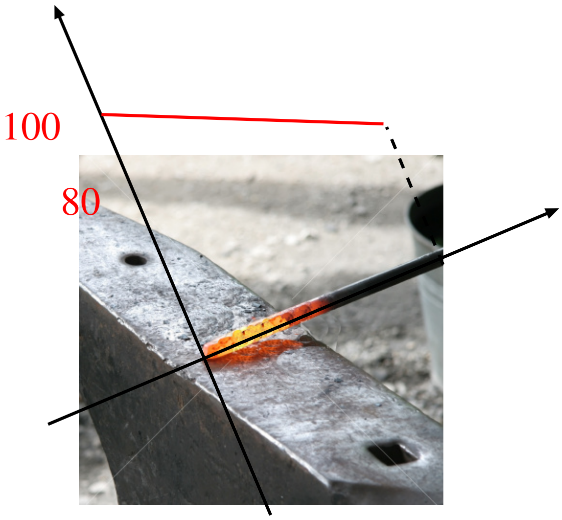
(c) Wie lauten die erste und zweite Zeile der Matrix aus der entsprechenden Finite Differenzen-Methode. Anders formuliert: Wie "bauen" wir die Neumann-Randbedingung $u'(1) = -2$ in die diskrete Darstellung ein?

(d) Wie lautet das komplettes LGS der Finite Differenzen-Methode für DIM=4?

**(Praxisteil)**

**Aufgabe 3 :**

Es sei $I = [0, 1]$ das Intervall, dass gerade die Mittelachse eines zylinderförmigen Eisenstabes beinhaltet. Die Funktion $u : I \to \mathbb{R}$ beschreibt die Temperatur in ° Celsius am jeweiligen Ort der Mittelachse. An den beiden Enden des Stabes sei jeweils eine feste Temperatur $g_L$ und $g_R$ gehalten, so dass $u(0) = g_L$ am linken Ende und $u(1) = g_R$ am rechten Ende gilt. Nach einer gewissen Zeit wird sich die Temperatur im Eisenstab in einen festen Zustand einfinden. Wir sprechen dann von einem stationären Zustand der Temperaturverteilung $u$. Dieser stationäre Zustand erfüllt die Differentialgleichung

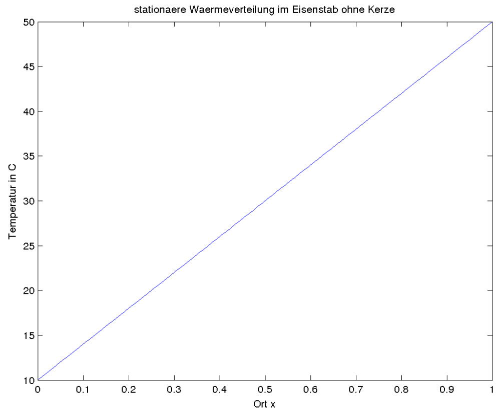



$$\begin{aligned} -u'' &= 0 \qquad \text{in } I \\ u(0) &= g_L \\ u(1) &= g_R \end{aligned}$$

(a) Wie lautet die Matrix-Vektor-Darstellung, die die Finite Differenzen-Methode der obigen Differentialgleichung samt Randbedingung beschreibt? Verwenden Sie dabei eine Zerlegung des Intervalls $I$ in $DIM - 1$ Teilintervalle $I_j = [x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, \dots, DIM - 1$ mit $h = \frac{|I|}{DIM-1}$. Die $u_i$ seien dann jeweils die Funktionswerte der Lösung $u$ ausgewertet an den Knoten $x_i$:

$$u_i = u(x_i) \quad \text{mit} \quad x_i = (i-1) \cdot h$$

(b) Schreiben Sie eine Funktion `NumDiff/StationaryDiffusionEquation`, in der obige Matrix $A$ und rechte Seite $f$ zu gegebenen Randwerten $g_L = 10$ und $g_R = 50$ und gegebener Dimension $\mathrm{DIM} = 100$ auf $I = [0, 1]$ aufgestellt werden. Stellen Sie die Lösung $u$ anschließend graphisch dar. Ihre Ausgabe sollte ungefähr so aussehen



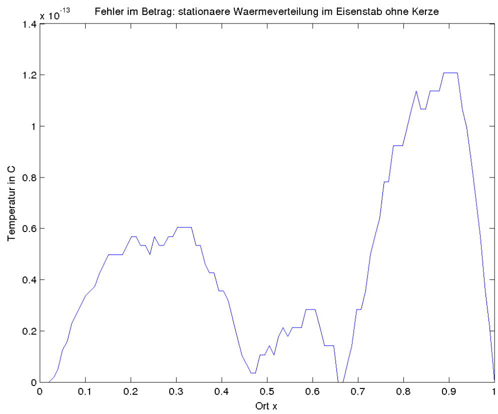

(c) Berechnen Sie analytisch die Lösung der Gleichung

$$u_{\text{ex}} = \int\int -u''\,dx\,dx \cdots .$$

Definieren Sie in `NumDiff/StationaryDiffusionEquation` die Funktion `fex = (@) ...`, die die exakte Lösung beschreibt. Stellen Sie den Fehler

$$\text{Error}_i = |u(i) - u_{\text{ex}}(x_i)|$$

graphisch dar. Das könnte dann so aussehen:




(d) Erstellen Sie eine Tabelle für alle Fehler

$$\text{Error} = \frac{1}{\sqrt{DIM}} \|u - u_{\text{ex}}\|_2$$

zu den Dimensionen $\text{DIM} \in \{10, 20, 40, 80\}$. Das Ergebnis sollte mit folgender Tabelle übereinstimmen:

| DIM | $h$ | Error |
|---|---|---|
| 10 | 0.1111 | 1.e-15 |
| 20 | 0.0526 | 1.e-16 |
| 40 | 0.0256 | 1.e-15 |
| 80 | 0.0127 | 1.e-14 |

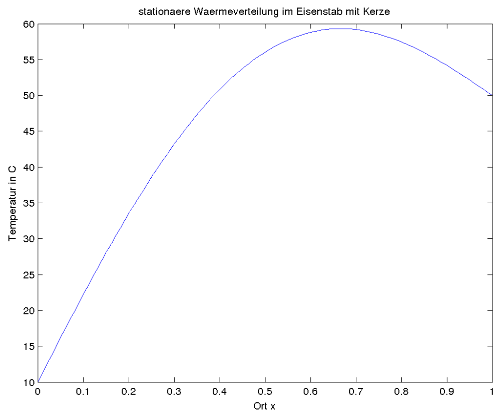
Aus nebenstehender Tabelle ergibt, dass der Fehler der berechneten zur exakten Lösung quasi Null ist. Warum ist das so?

(e) Wiederholen Sie die Aufgabenteile (a) bis (d), wobei Sie nun eine Kerze unter den Eisenstab stellen sollen. Füllen Sie dazu die rechte Seite $f$ mit Funktionswerten

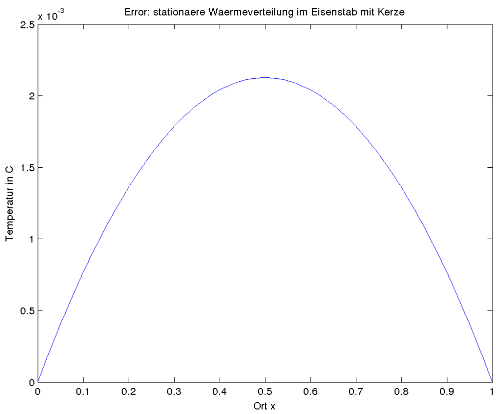
$$f(x) = \mathrm{S}\, x\,(1-x)\,.$$

$\mathrm{S}$ ist ein frei wählbarer Parameter, der die "Hitze" der Kerze steuert, etwa $S = 1000$.

Für $\mathrm{DIM} = 10^3$ erhalten Sie folgendes Ergebnis der diskreten Lösung:




Die exakte Lösung für dieses Modell müssen Sie nun ernetu berechnen. Die graphische Darstellung Ihrer Lösung dürfte nun der folgenden sehr ähnlich sein:




Wenn Sie nun den Fehler in der 2-Norm zu verschiedenen Gitterweiten $h$ auflisten sollten Sie diese Tabelle erhalten:

| DIM | $h$ | Error |
|---|---|---|
| 10 | 1.11e-01 | 1.78e-01 |
| 20 | 5.26e-02 | 4.11e-02 |
| 40 | 2.56e-02 | 9.88e-03 |
| 80 | 1.27e-02 | 2.42e-03 |

Konvergiert Ihr Verfahren? Und wenn ja, mit welcher Konvergenzordnung? Haben Sie die erwartet?

**Aufgabe 4 :**

Lösen Sie das RWP

$$-2\,u'' + u' - u = \sin x\,,\ u(0) = 0\,,\ u'(1) = -2$$

und stellen Sie Ihr Ergebnis graphisch dar.

Spielen Sie ein wenig mit den Randwerten und überlegen Sie, ob die graphischen Ergebnisse plausibel sind.