Blatt 8: nichtlineare Ausgleichsrechnung - Regression MNEU

nur praktischer Teil:

Aufgabe 1 :

Laden Sie die Datei http://axtr.xthelm.de/Lehre/MNEU/Praktikum/Regression/MyReg.m herunter uns speichern Sie sie im Verzeichnis `Regression`.

Aufgabe 2 :

Führen Sie das Skript aus Aufgabe mit Matlab aus und machen Sie sich die einzelnen Komponenten klar. Diskutieren Sie das gerne mit Ihrem Sitznachbarn.

Aufgabe 3 :

(a) Berechnen Sie die Lösung aus Blatt 7 Aufgabe 1 mit `lsqnonlin`. Fügen Sie die entsprechenden Punktewerte ein und passen Sie die Ansatzfunktion an. Was ist die Lösung vom lsqnonlin? Wie lautet die Lösungsfunktion?

(b) Verfahren Sie genauso mit Aufgabe 2 aus Blatt 7.

(c) Wählen Sie als Ansatzfunktion nun einen Repräsentanten aus dem ganzen $\mathbb{P}_2$, also

$$p(x) = a_2\, x^2 + a_1\, x + a_0\,.$$

Was stellen Sie fest?

(d) (i) Laden Sie die Punktepaare aus der Datei Daten/Filip.dat und führen Sie damit Schritt (c) abermals durch.

(ii) Mit dem Aufruf `[c res] = lsqnonlin(@Residuum,c0);` in Zeile 9 von `MyReg.m` erhalten Sie eine zusätzliche Information bezüglich des resultierenden Residuums. Lesen Sie in `>> help lsqnonlin` nach, was der Wert `res` genau beinhaltet.

(iii) Ermitteln Sie die Residuenwerte von Teil (a) bis (d).

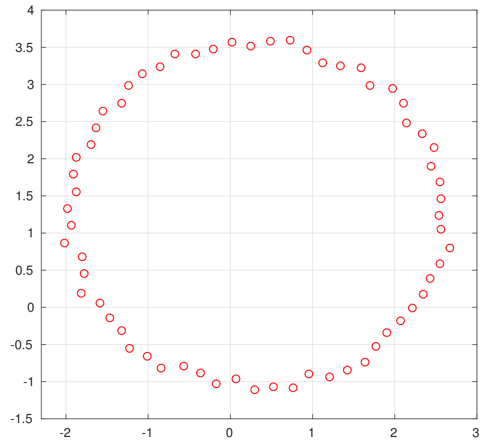
(e) Wer die Ansatzfunktion findet, mit dem kleinsten Quadratfehler (`res` aus `lsqnonlin`) erhält einen Preis! (Sie können auch mit den Startwerten wackeln; Einsen statt Nullen oder so.)

Aufgabe 4 :

Bei dieser Aufgabe betrachten wir eine Menge von Daten, die eigentlich einem Kreis mit Radius $R \in \mathbb{R}$ und Mittelpunkt $M = (m_x, m_y) \in \mathbb{R}^2$ angehören. Leider sind die Messdatein ein wenig verrauscht. Huch!
Gesucht sind nun Radius und Mittelpunkt des Kreises

$$R \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + M\,,$$

so dass der Quadratfehler



$$Q(R, m_x, m_y) = \sum_{i=1}^{N} \mathrm{res}_i^2(R, m_x, m_y)$$

minimiert wird.

(a) Wie lautet hier das Residuum $\mathrm{res}_i(R, m_x, m_y)$?

Tipp: Der Abstand eines jeden Punktes x des Kreises zum Mittelpunkt M, also $\|x_i - M\|$, sollte ja gleich dem Radius sein. Man will also die Differenz dieses Abstands zum Radius R minimieren.

(b) Implementieren Sie dieses und berechnen Sie die Lösungen für R, m_x und m_y.

Lösung 1:

(...)

Lösung 2:

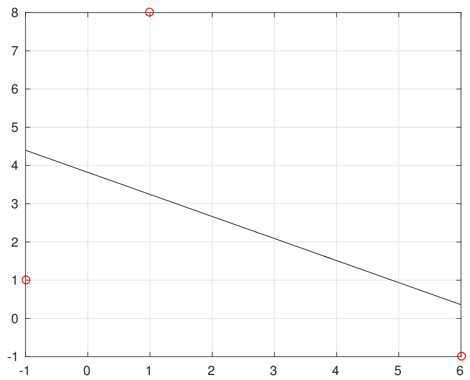
(...)

Lösung 3:

(a)

Sie müssen lediglich die Punkte und die Ansatzfunktion umdefinieren:
Zeile 5 in `MyReg.m`:
`>> P = [[-1,1];[1,8];[6,-1]];`
Zeile 26 in `MyReg.m`:
`>> y = c(1)*x+c(2);`
Damit erhalten Sie als Lösung:
`c = (-0.5769,3.8205)` also die Gerade

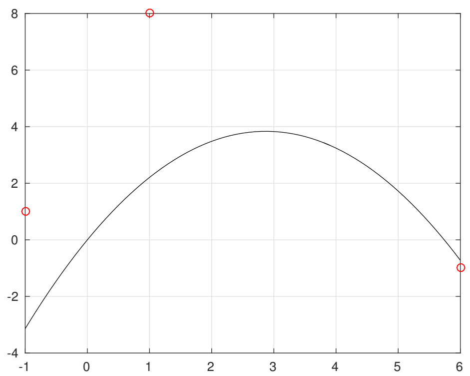
$$f(x) = -5.77 \cdot 10^{-1}\, x + 3.82\,.$$



(b)

Da es sich um die gleichen Punkte handelt muss nun nur die Ansatzfunktion angepasst werden:
Zeile 26 in `MyReg.m`:
`>> y = c(1)*x.^2+c(2)*x;`
Damit erhalten Sie als Lösung:
`c = (-0.4655,2.6724)` also die Kurve

$$g(x) = -4.66 \cdot 10^{-1}\, x^2 + 2.67\, x\,.$$



(c)

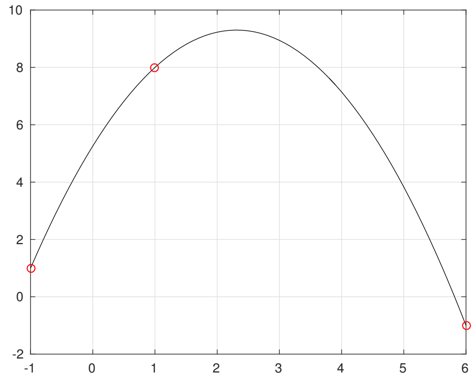
Sie passen die Ansatzfunktion an:
Zeile 26 in `MyReg.m`:

```
>> y = c(3)*x.^2+c(2)*x+c(1);
```

Nun müssen Sie natürlich noch das Startfeld c0 um eine Komponente erweitern:
Zeile 7 in `MyReg.m`:

```
>> c0 = [0 0 0];
```

Damit erhalten Sie als Lösung:
`c = (5.2571,3.5000,-0.7571)` also die Kurve



$$p(x) = -7.57 \cdot 10^{-1}\, x^2 + 3.5\, x + 5.26\,.$$

Wir stellen fest: Die Kurve verläuft genau durch die Punkte.

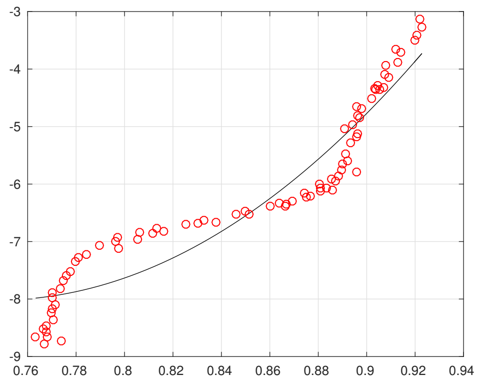
(d) (i) Neue Punkte:
Zeile 5 in `MyReg.m`:

```
>> P = load('Daten/Filip.dat');
```

Damit die graphische Ausgabe etwas schöner wird:
Zeilen 11 und 12 in `MyReg.m`:

```
DIM = 50; h = (max(P(:,1))-min(P(:,
xx=min(P(:,1)):h:max(P(:,1));
```

Damit erhalten Sie als Lösung:
`c = (69.9934,-208.7238,139.6119)` also die Kurve



$$p(x) = 139.61\, x^2 - 208.72\, x + 69.99\,.$$

(ii) `res` beinhaltet den Quadratfehler

$$\texttt{res} = \sum_{i=1}^{N} (P_y^i - \text{Ansatzfunktion}(P_x^i))^2\,.$$

(iii)

$$\begin{aligned} \text{res}_{(a)} &\approx 36.01 \\ \text{res}_{(b)} &\approx 50.76 \\ \text{res}_{(c)} &= 0 \\ \text{res}_{(d)} &\approx 17.35 \end{aligned}$$

(e) Mein momentan bestes Residuum

$$2.847759810457520$$

Lösung 4:

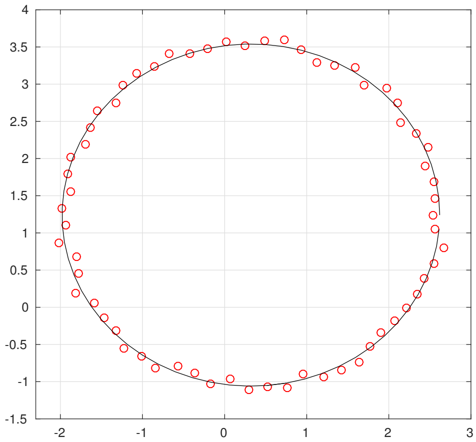
(a)

$$\mathrm{res}_i = \|P^i - M\| - R = \sqrt{(P^i_x - m_x)^2 + (P^i_y - m_y)^2} - R$$

(b) Hier definieren wir keine Ansatzfunktion sondern nur das Residuum; geanu wie in (a) angegeben. Wir wählen für die gesuchten Koeffizienten, die Variablen also des Quadratfehlers Q: `c=(mx,my,R)`.

```
function MyReg()
global P
P  = load('Daten/Kreis.dat');
c0 = ones(1,3);
[c res] = lsqnonlin(@Residuum,c0);
end

function y=Residuum(c)
global P
    y = sqrt((c(1)-P(:,1)).^2+(c(2)-P
end
```



liefert: `M=(3.18e-01,1.25e-00)` und `R=2.30e-00` mit Residuum `res=2.02e-01`.

Den Kreis plotten können Sie mit

```
t      = 0:0.1:2*pi;
x(:,1) = c(3)*cos(t)+c(1);
x(:,2) = c(3)*sin(t)+c(2);
plot(x(:,1),x(:,2),'k-');
% oder mit Datenbobbel
plot(x(:,1),x(:,2),'k-',P(:,1),P(:,2),'ro');
```