NLGS - Newton-Verfahren **MNEU**

(Theorieteil)

Aufgabe 1 :

(a) Berechnen Sie jeweils Gradient und Hessematrix der Funktionen

$$u(x) = x_1\, x_2^3\,, \quad v(x) = \mathrm{e}^{2\,x_1} + \sin(x_1\, x_2) \quad \text{und} \quad w(x) = x_1^{x_2}\,.$$

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^4 \\ \frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}$$

am Punkt $x = (3, 2)$.

(c) Berechnen Sie jeweils die Ableitungen

(i)

$$\frac{\partial}{x_2}\,(x_1\, \sin(2\,x_2))$$

(ii)

$$(x_1\, \cos x_2)_{x_2\, x_2}$$

(iii)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2\, \partial x_1}\, \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3}$$

Tipp: Berechnen Sie zunächst die partielle Ableitung nach x_1, also $\frac{\partial}{\partial x_1}\, \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3}$ und dann davon die partielle Ableitung nach x_2.

(d) Wie lauten die Funktionen f mit

$$\nabla f = 2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 3 \end{pmatrix}?$$

Tipp: Berechnen Sie Stammfunktionen der ersten Komponente von ∇f bezüglich x_1 und der zweiten Komponente bezüglich x_2. Wählen Sie die Integrationskonstanten so, dass Sie beide Ausdrücke zu f zusammenfassen können. f selbst sollte dann immer noch eine Integrationskonstante enthalten.

(Praxisteil)

Aufgabe 2 :

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = x_1 + x_2 \cos(x_1) \, .$$

(a) Führen Sie das Skript Func/PlotFlaeche.m in Matlab aus. Es zeigt Ihnen die Darstellung der Funktion auf dem Gebiet $\Omega = [-10, 10]^2$.

(b) Wo könnte dieser Graph ein Extremum haben? Berechnen Sie den Betrag des Gradienten

$$\|\nabla f\|_2$$

und fügen Sie in `PlotFlaeche.m` eine Funktion `df = @(x) ...` hinzu. Plotten Sie diesen Graphen.

(c) Ermessen Sie einen Bereich, indem vermutlich der Gradient verschwindet und schränken Sie `Ix` und `Iy` im Skript entsprechend ein.

(d) Berechnen Sie die Hessematrix von f.

(e) Editieren Sie nun `Func/NewtonFunc.m` so dass `MyNewtonSys.m` die gewünschte Nullstelle berechnet. Starten Sie das Newton-Verfahren mit verschiedenen Startwerten, die in der Nähe zu verschiedenen stationären Punkten liegen.

(f) Was passiert bei der Wahl von $x_0 = 0$ und warum?

Aufgabe 3 :

Zwei Flugobjekte beschreiben je eine Flugbahn - per Zufall in einer Ebenen gelegen - die jeweils durch folgende Parameterisierungen in Abhängigkeit der Zeit t beschrieben werden können:

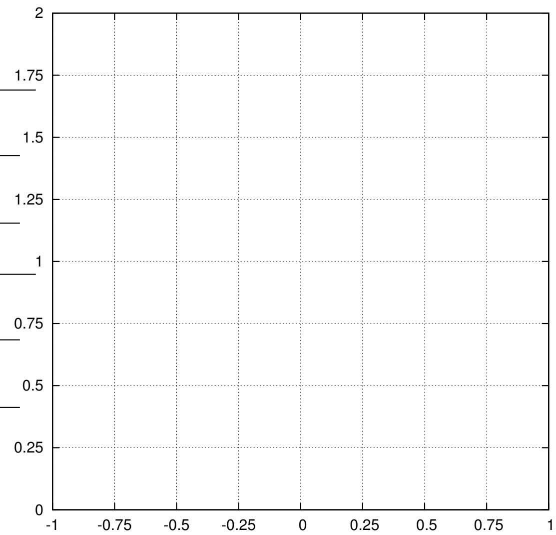
$$ET(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$PIC(t) = \begin{pmatrix} 1 - t\,\cos\alpha \\ t\,\sin\alpha - \frac{t^2}{10} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Abschussposition und -richtung der beiden Flugobjekte:

Skizzieren Sie die Situation für $\alpha = \frac{\pi}{4}$:

Objekt	Abschussposition
ET	
PIC	
	Abschussrichtung
ET	
PIC	



(b) Nach Abbildung 1 erhält die Vermutung, dass die Flugbahnen der beiden Objekte sich kreuzen, eine gewisse Rechtfertigung. Wie lange muss man beobachtend ausharren bis ein Zusammenstoß überhaupt möglich ist und das unabhängig von α. Anders gefragt: Ab wann überfliegen die beiden Flugobjekte den selben (!!) Bodenbereich?

(c) Mittlerweile drängt sich der Eindruck auf, dass ein Zusammenstoß der beiden Flugobjekte vielleicht nicht sehr wahrscheinlich aber dennoch möglich ist. Berechnen Sie nun mit dem Newton-Verfahren zu welchem Punktepaar (α, t), die beiden aufeinanderprallen.

Wie lautet die Funktion, deren Nullstelle gesucht wird?

$$f(\alpha, t) = \boxed{}$$

Und wie die erste Ableitung?

$$D\,f(\alpha,t) = \boxed{}$$

(d) Die Funktion `Func/ETPIC.m` der Form `[f Df] = ETPIC([alpha t])` stelle den Funktionsvektor f und die Jacobi-Matrix Df bereit.

(e) Wählen als Toleranz für das Residuum $\mathrm{Res}^k = \|f(\alpha^k, t^k)\|$ das Abbruchkriterium `TOL=1.e-12`, als Startwert $x^0 = (1,1)$ und führen Sie das Programm `MyNewtonSys` aus.

Bei welchem Abschusswinkel treffen die Flugobjekte wann und wo zusammen?