

NLGS - Newton-Verfahren

MNEU

(Theorieteil)

Aufgabe 1:_

(a) Berechnen Sie jeweils Gradient und Hessematrix der Funktionen

$$u(x) = x_1 x_2^3$$
, $v(x) = e^{2x_1} + \sin(x_1 x_2)$ und $w(x) = x_1^{x_2}$.

(b) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix von

$$g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2^4 \\ \frac{x_1}{x_2} \end{pmatrix}$$

am Punkt x = (3, 2).

(c) Berechnen Sie jeweils die Ableitungen

(i)

$$\frac{\partial}{x_2} \left(x_1 \sin(2x_2) \right)$$

(ii)

$$(x_1\cos x_2)_{x_2\,x_2}$$

(iii)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_2 \, \partial x_1} \sqrt[x_2]{x_2}^{x_3}$$

Tipp: Berechnen Sie zunächst die partielle Ableitung nach x_1 , also $\frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt[x_1]{x_2} \sqrt{x_2}$ und dann davon die partielle Ableitung nach x_2 .

(d) Wie lauten die Funktionen f mit

$$\nabla f = 2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 3 \end{pmatrix} ?$$

Tipp: Berechnen Sie Stammfunktionen der ersten Komponente von ∇f bezüglich x_1 und der zweiten Komponente bezüglich x_2 . Wählen Sie die Integrationskonstanten so, dass Sie beide Ausdrücke zu f zusammenfassen können. f selbst sollte dann immer noch eine Integrationskonstante enthalten.

(Praxisteil)

Aufgabe 2:__

Gegeben ist die Funktion $f: {\rm I\!R}^2 \to {\rm I\!R}$ mit

$$f(x) = x_1 + x_2 \cos(x_1)$$
.

- (a) Führen Sie das Skript Func/PlotFlaeche.m in Matlab aus. Es zeigt Ihnen die Darstellung der Funktion auf dem Gebiet $\Omega=[-10,10]^2$.
- (b) Wo könnte dieser Graph ein Extremum haben? Berechnen Sie den Betrag des Gradienten

$$\|\nabla f\|_2$$

und fügen Sie in PlotFlaeche.m eine Funktion df = $\mathbb{Q}(x)$... hinzu. Plotten Sie diesen Graphen.

- (c) Ermessen Sie einen Bereich, indem vermutlich der Gradient verschwindet und schränken Sie Ix und Iy im Skript entsprechend ein.
- (d) Berechnen Sie die Hessematrix von f.
- (e) Editieren Sie nun Func/NewtonFunc.m so dass MyNewtonSys.m die gewünschte Nullstelle berechnet. Starten Sie das Newton-Verfahren mit verschiedenen Startwerten, die in der Nähe zu verschiedenen stationären Punkten liegen.
- (f) Was passiert bei der Wahl von $x_0 = 0$ und warum?

Aufgabe 3:



Zwei Flugobjekte beschreiben je eine Flugbahn - per Zufall in einer Ebenen gelegen - die jeweils durch folgende Parameterisierungen in Abhängigkeit der Zeit t beschrieben werden



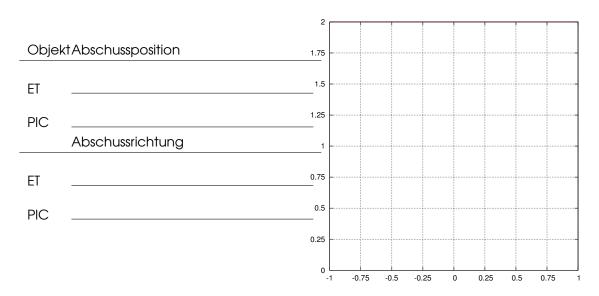
können:

$$ET(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$PIC(t) = \begin{pmatrix} 1 - t \cos \alpha \\ t \sin \alpha - \frac{t^2}{10} \end{pmatrix}$$

(a) Bestimmen Sie Abschussposition und -richtung der beiden Flugobjekte:

Skizzieren Sie die Situation für $\alpha = \frac{\pi}{4}$:



- (b) Nach Abbildung 1 erhält die Vermutung, dass die Flugbahnen der beiden Objekte sich kreuzen, eine gewisse Rechtfertigung. Wie lange muss man beobachtend ausharren bis ein Zusammenstoß überhaupt möglich ist und das unabhängig von α . Anders gefragt: Ab wann überfliegen die beiden Flugobjekte den selben (!!) Bodenbereich?
- (c) Mittlerweile drängt sich der Eindruck auf, dass ein Zusammenstoß der beiden Flugobjekte vielleicht nicht sehr wahrscheinlich aber dennoch möglich ist. Berechnen Sie nun mit dem Newton-Verfahren zu welchem Punktepaar (α,t) , die beiden aufeinanderprallen.

Wie lautet die Funktion, deren Nullstelle gesucht wird?

$$f(\alpha,t) =$$

Und wie die erste Ableitung?

$$D f(\alpha, t) =$$

- (d) Die Funktion Func/ETPIC.m der Form [f Df] = ETPIC([alpha t]) stelle den Funktionsvektor f und die Jacobi-Matrix Df bereit.
- (e) Wählen als Toleranz für das Residuum $\mathrm{Res}^k = \|f(\alpha^k,t^k)\|$ das Abbruchkriterium TOL=1.e-12, als Startwert $x^0=(1,1)$ und führen Sie das Programm MyNewtonSys aus.

Bei welchem Abschusswinkel treffen die Flugobjekte wann und wo zusammen?



Lösung 1:_

(a)

$$\nabla u = \begin{pmatrix} (x_1 \, x_2^3)_{x_1} \\ (x_1 \, x_2^3)_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^3 \\ 3 \, x_1 \, x_2^2 \end{pmatrix}$$

$$H \, u = \begin{pmatrix} u_{x_1 x_1} & u_{x_1 x_2} \\ u_{x_2 x_1} & u_{x_2 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \, x_2^2 \\ 3 \, x_2^2 & 6 \, x_1 \, x_2 \end{pmatrix}$$

$$\nabla v = \begin{pmatrix} (e^{2x_1} + \sin(x_1 x_2))_{x_1} \\ (e^{2x_1} + \sin(x_1 x_2))_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2x_1} + x_2 \cos(x_1 x_2) \\ x_1 \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

$$H v = \begin{pmatrix} v_{x_1 x_1} & v_{x_1 x_2} \\ v_{x_2 x_1} & v_{x_2 x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4e^{2x_1} - x_2^2 \sin(x_1 x_2) & -x_2 x_1 \sin(x_1 x_2) + \cos(x_1 x_2) \\ \cos(x_1 x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 x_2) & -x_1^2 \sin(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla w = \begin{pmatrix} (x_1^{x_2})_{x_1} \\ (x_1^{x_2})_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 x_1^{x_2 - 1} \\ (\ln x_1) x_1^{x_2} \end{pmatrix}$$

$$H w = \begin{pmatrix} w_{x_1 x_1} & w_{x_1 x_2} \\ w_{x_2 x_1} & w_{x_2 x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_2 x_1^{x_2 - 1})_{x_1} & (x_2 x_1^{x_2 - 1})_{x_2} \\ ((\ln x_1) x_1^{x_2})_{x_1} & ((\ln x_1) x_1^{x_2})_{x_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_2 (x_2 - 1) x_1^{x_2 - 2} & x_1^{x_2 - 1} (1 + x_2 \ln x_1) \\ x_1^{x_2 - 1} (1 + x_2 \ln x_1) & (\ln^2 x_1) x_1^{x_2} \end{pmatrix}$$

(b) Jacobi-Matrix von q

$$Dg = \begin{pmatrix} (x_1)_{x_1} & (x_1)_{x_2} \\ (x_2^4)_{x_1} & (x_2^4)_{x_2} \\ (\frac{x_1}{x_2})_{x_1} & (\frac{x_1}{x_2})_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4x_2^3 \\ \frac{1}{x_2} & \frac{-x_1}{x_2^2} \end{pmatrix}$$

ausgewertet am Punkt (3,2):

$$Dg(3,2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 42^3 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 32 \\ \frac{1}{2} & \frac{-3}{4} \end{pmatrix}$$

(c) (i)
$$\frac{\partial}{x_2} \; (x_1 \, \sin(2 \, x_2)) = x_1 \, 2 \, \cos(2 \, x_2)$$

$$(x_1 \cos x_2)_{x_2 x_2} = (-x_1 \sin x_2)_{x_2} = -x_1 \cos x_2$$

(iii)

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial x_1} \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3} = \left((x_2^{x_3})^{\frac{1}{x_1}} \right)_{x_1} & \text{denken Sie an } (a^{\frac{1}{x}})' = (\ln a) \, a^{\frac{1}{x}} \, \frac{-1}{x^2} \\ & = \ln \left(x_2^{x_3} \right) \, x_2^{\frac{x_3}{x_1}} \, \frac{-1}{x_1^2} \\ & = \frac{-x_3 \, \ln x_2}{x_1^2} \, \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3} \end{array}$$

Und jetzt die zweite Ableitung noch:

$$\begin{split} \frac{\partial^2}{\partial x_2 \, \partial x_1} \, \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3} &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{-x_3 \, \ln x_2}{x_1^2} \, \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3} \right) \\ &= \frac{-x_3}{x_1^2 \, x_2} \, \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3} + \frac{-x_3 \, \ln x_2}{x_1^2} \, \frac{x_3}{x_1 \, x_2} \, \sqrt[x_2]{x_2}^{x_3} \\ &= \frac{-x_3}{x_1^2 \, x_2} \, \sqrt[x_1]{x_2}^{x_3} \left(1 + \frac{x_3 \, \ln x_2}{x_1} \right) \end{split}$$

(d)

$$\nabla f = 2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - 3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad f = ?$$

Die erste Komponente des Gradienten entstand durch die partielle Ableitung von f nach x_1 , also integrieren wir diese Funktion bezüglich x_1 :

$$\int 2(x_1 + x_2) dx_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + C_1$$

Die zweite Komponente des Gradienten entstand durch die partielle Ableitung von f nach x_2 , also integrieren wir diese Funktion bezüglich x_2 :

$$\int 2(x_1 - 3) dx_2 = 2x_1x_2 - 6x_2 + C_2$$

Die beiden Stammfunktionen müssen nun in "Einklang" gebracht werden. Dazu darf $C_2=C_2(x_1)$ und $C_1=C_1(x_2)$ gelten (warum?), also wählen wir für die Konstanten

$$C_1(x_2) = -6x_2$$
 und $C_2(x_1) = x_1^2 + C$

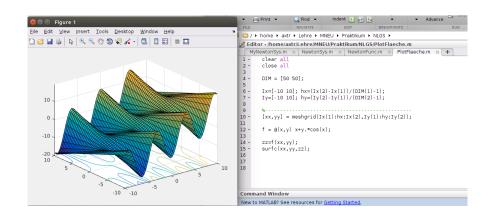
und erhalten für f den Ausdruck

$$f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 - 6x_2 + C.$$



Lösung 2:

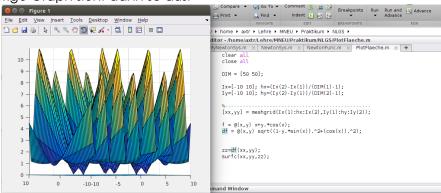
(a)



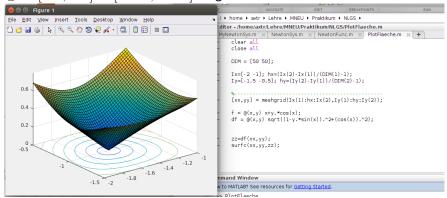
(b) $\nabla f = \begin{pmatrix} 1 - x_2 \sin(x_1) \\ \cos(x_1) \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\nabla f\|_2 = \sqrt{(1 - x_2 \sin(x_1))^2 + \cos^2 x_1}$

Im Skript schreiben wir also: $df = @(x,y) \ sqrt((1-y.*sin(x)).^2+(cos(x)).^2);$

Der zugehörige Graph sieht dann so aus:



(c) Zoom auf $\Omega_Z = [-2,-1] \times [-1.5,-0.5]$ zeigt



(d)

$$Hf = \nabla \nabla f = \nabla \begin{pmatrix} 1 - x_2 \sin(x_1) \\ \cos(x_1) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \nabla (1 - x_2 \sin(x_1)) \\ \nabla (\cos(x_1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \cos(x_1) & -\sin(x_1) \\ -\sin(x_1) & 0 \end{pmatrix}$$

(e) Func/NewtonFunc.m

function [f Df]=NewtonFunc(x)

$$f = [1-x(2).*sin(x(1)), cos(x(1))]; \\ Df = [[-x(2).*cos(x(1)), -sin(x(1))]; [-sin(x(1)), 0]]; \\$$

end

(f) Bei x=0 verschwindet die Hessematrix und kann in Folge dessen nicht mehr invertiert werden.

Lösung 3: __

(a) Startsituation t=0, am Beispiel $\alpha=\frac{\pi}{4}$:

$$ET(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad ET'(t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ e^{-t} \end{pmatrix}|_{t=0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$PIC(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad PIC'(t)|_{t=0} = \begin{pmatrix} -\cos\alpha \\ \sin\alpha - \frac{1}{5}t \end{pmatrix}|_{t=0} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Der Bodenbezugspunkt eines fliegenden Objekts ist ja gerade die x_1 -Koordinate der Parametrisierung. ET startet bei $x_1=0$ und das Schwein bei $x_1=1$. Kurz nach dem Start können die beiden gar nicht kollidieren, weil sie sich zu weit voneinander entfernt befinden. Sobald sie einen gemeinsamen Bereich der x_1 -Achse überfliegen wird's gefährlich, also ab dem Zeitpunkt t mit

$$t = 1 - t \cos \alpha \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{1 + \cos \alpha}$$

und das hängt, na klar, vom Abschusswinkel α ab.

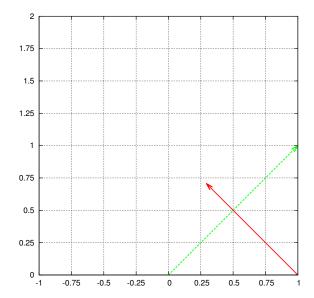


Abbildung 1: Abschussort, -richtung und -geschwindigkeit (=1, Betrag der Vektoren) zum Zeitpunkt t=0.

(c)
$$f(\alpha,t) = PIC_{\alpha}(t) - ET(t) = \begin{pmatrix} 1 - t(1 + \cos \alpha) \\ e^{-t} - 1 + t\sin \alpha - \frac{1}{10}t^2 \end{pmatrix}$$
$$Df(\alpha,t) = \begin{pmatrix} f_{\alpha}^1 & f_t^1 \\ f_{\alpha}^2 & f_t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin \alpha & -(1 + \cos \alpha) \\ t\cos \alpha & -\frac{1}{5}t + \sin \alpha - e^{-t} \end{pmatrix}$$

(d) function [f Df] = ETPIC(x)

$$a = x(1);$$

$$t = x(2);$$

$$f(1) = 1-\cos(a)*t - t;$$

$$f(2) = \sin(a)*t-t.^2/10 - 1 + \exp(-t);$$

$$Df(1,1) = t*\sin(a);$$

$$Df(1,2) = -1-\cos(a);$$

$$Df(2,1) = t*\cos(a);$$

$$Df(2,2) = -t/5+\sin(a)-\exp(-t);$$
end

(e) Programmausschnitt:

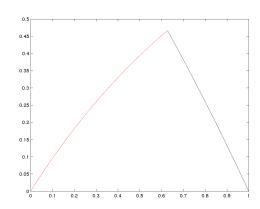
$$x0 = ones(1,2);$$

TOL = 1.0e-12; ItMax = 1000;

[x k] = NewtonSys(x0,@AxSolve,@ETPIC,TOL,ItMax,1);

Ausgabe des Programms:

Res.: 1.88e-02 nach 1 Iterationen Res.: 8.02e-04 nach 2 Iterationen Res.: 2.31e-07 nach 3 Iterationen Res.: 4.78e-14 nach 4 Iterationen



Das Aufeinandertreffen findet nach $t\approx 0.6279$ bei einem Abschusswinkel von $\alpha\approx 0.93638$ am Ort (0.6279,0.4663) statt, denn

$$ET(0.6279) \approx \begin{pmatrix} 0.63 \\ 1 - e^{-0.63} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.63 \\ 0.47 \end{pmatrix}$$

und

$$PIC(0.6279) \approx \begin{pmatrix} 1 - 0.63 \cos 0.94 \\ 0.63 \sin 0.94 - \frac{0.63^2}{10} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.63 \\ 0.47 \end{pmatrix}$$