Blatt 4: Jacobi-(Gesamtschritt)-Verfahren **MNEU**

(Theorieteil)

Aufgabe 1 :

Gegeben Sei der normierte Vektorraum $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_3)$ mit

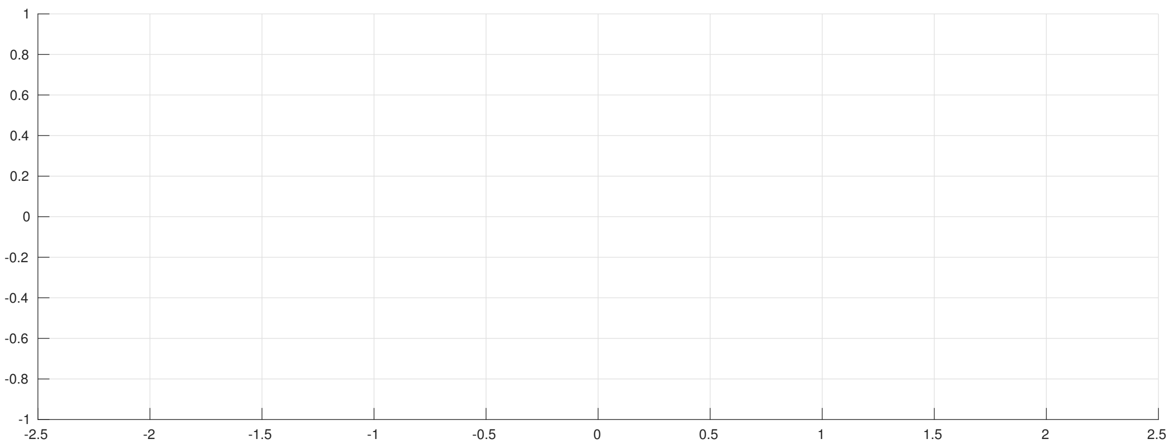
$$\|x\|_3 = \sqrt[3]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^3}\,.$$

(a) Warum ist die oben genannte Abbildung keine Norm mehr, wenn man die Betragsstriche weg lässt?

(b) Es sei $M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_3 = 1\}$. Zeichnen Sie die Menge M_3 und die Bildpunkte von M_3 unter der Abbildung $\mathcal{A}(x) = A\,x$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

in folgendes Achsenkreuz ein.

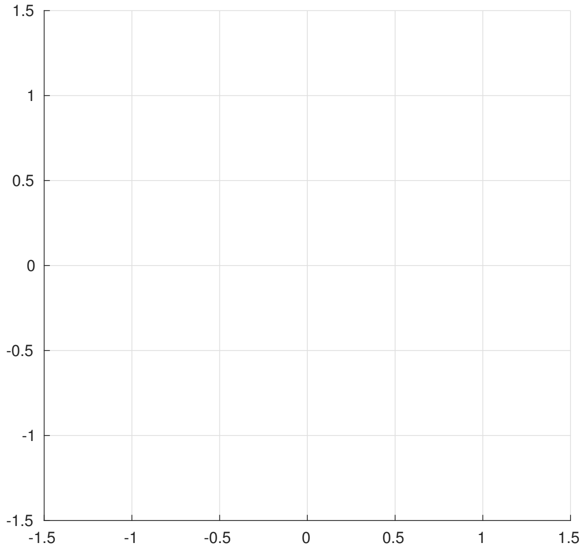


(c)

Fügen Sie in nebenstehendes Achsenkreuz die Mengen

$$\begin{aligned} M_{\frac{1}{2}} &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_{\frac{1}{2}} = 1\} \\ M_1 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = 1\} \\ M_2 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\} \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_3 = 1\} \\ M_\infty &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\} \end{aligned}$$

hinzu.



Aufgabe 2 :

Berechnen Sie Zeilensummen-, Spaltensummen- und Spektralnorm der Matrizen

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -8 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & -i \\ 2 & 3+i \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 $\star$-chen-Aufgabe :-):

Für das LGS

$$A\,x = y$$

wenden Sie den Ansatz

$$A = L + D + R$$

an, wobei D die Diagonalelemente von A, L die untere Dreiecksmatrix von A und R die obere Dreiecksmatrix von A beschreibt. Mit dieser Zerlegung erhalten Sie die Fixpunktiteration (Gauß-Seidel)

$$x^{k+1} = \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} L_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^{n} R_{ij}\, x_j^k \right) \frac{1}{a_{ii}}\,,$$

bzw.

$$x^{k+1} = T\,x^k + z\,.$$

Wie lautet die Matrix T?

Tipp: Denken Sie nicht zu kompliziert.

(Praxisteil)

Aufgabe 4 :

(a) Berechnen Sie mit dem Programm `LGS/MyJOR.m` (Jacobi - Gesamtschrittverfahren) die Näherungslösung x^{10} des LGS

$$\begin{pmatrix} 10 & -4 & -2 \\ -4 & 10 & -4 \\ -6 & -2 & 12 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

(b) Ändern Sie das Programm dahingehend ab, dass Sie nicht mehr die Anzahl der Iterationen vorgeben, sondern eine Toleranz für das Residuum in der $\|\cdot\|_2$-Norm

```
>> norm(y-Ax,2);.
```

Wieviele Iterationen sind nötig, um eine Toleranz von 10^{-8} zu unterschreiten?

(c) Führen Sie den Schritt in (b) mit dem `LGS/MyJOR2.m` (Gauß-Seidel - Einzelschrittverfahren) durch. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 5 :

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \quad \text{und der Vektor} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

(a) Versuchen Sie sowohl mit Hilfe des Jacobi-Verfahrens die Lösungen der LGSe $A\,x = y$ und $B\,x = y$, zu berechnen. Was stellen Sie fest?

(b) Führen Sie die Schritte in (a) noch einmal durch mit dem Gauß-Seidel-Verfahren. Was stellen Sie fest?

(c) Wählen Sie für die Iterationen verschiedene Startwerte. Was stellen Sie fest?

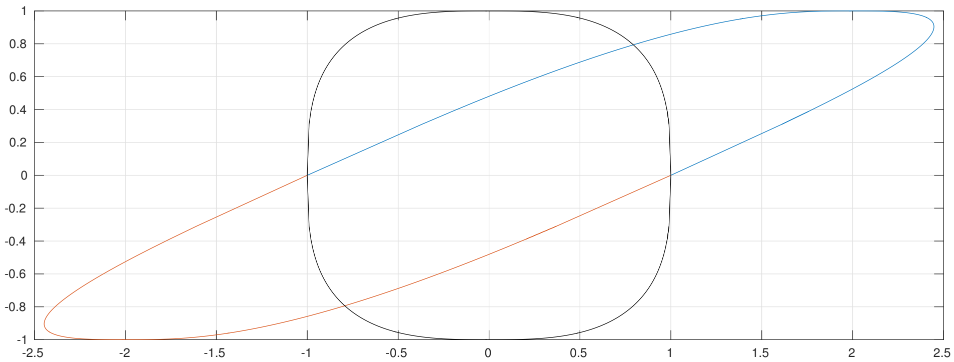
Aufgabe 6 :

Gegeben das LGS aus Aufgabe 2, Blatt2 (LR-Zerlegung) zur Berechnung eines Splines. Versuchen Sie mal nur dieses LGS mit dem Jacobi-Verfahren zu lösen. Was passiert? Warum passiert das? Wie untersuchen Sie die Situation?

Lösung 1:

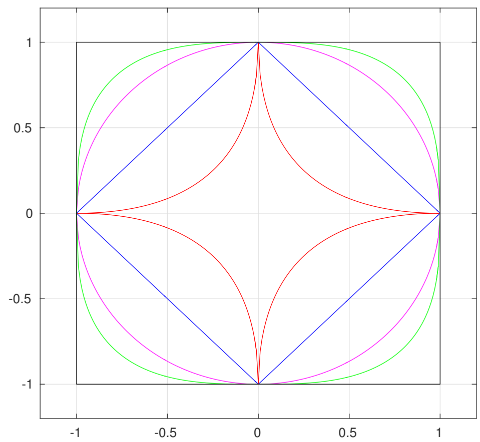
(a) Das Normaxiom $N1$: $\|x\| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ wäre nicht erfüllt.

(b)



(c)

$$M_{\frac{1}{2}} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_{\frac{1}{2}} = 1\}$$
$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_1 = 1\}$$
$$M_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 = 1\}$$
$$M_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_3 = 1\}$$
$$M_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_\infty = 1\}$$



Lösung 2:

(a)

$$\|A\|_1 = \max\{|1| + |3|, |2| + |-8|\} = \max\{4, 10\} = 10 \qquad \texttt{>> norm(A,1)}$$
$$\|A\|_\infty = \max\{|1| + |2|, |3| + |-8|\} = \max\{3, 11\} = 11 \qquad \texttt{>> norm(A,inf)}$$
$$\|A\|_2 \approx 8.68 \qquad \texttt{>> norm(A,2)}$$

$\|A\|_2$ händisch berechnet (war ja die Aufgabe):

$$\begin{aligned}
& & 0 &= \det(A^T A - \mu E_2) \\
& & &= \mu^2 - 78\,\mu + 14^2 \\
&\Leftrightarrow & \mu_{1,2} &= 39 \pm 5\sqrt{53} \\
&\Rightarrow & \|A\|_2 &= \sqrt{39 \pm 5\sqrt{53}} \approx 8,68
\end{aligned}$$

Die Rechnung zu $\|A\|_2$ können Sie in Matlab auch mit

```
>> max(sqrt(eig(transpose(A)*A)))
```

durchführen. Dann sehen Sie besser, was tatsächlich berechnet wird.

(b)

$$\begin{aligned}
\|B\|_1 &= \max\{|1+i|+2, |-i|+|3+i|\} = \max\{\sqrt{2}+2, 1+\sqrt{10}\} \approx 4.16 \\
\|B\|_\infty &= \max\{|1+i|+|-i|, 2+|3+i|\} = \max\{1+\sqrt{2}, 2+\sqrt{10}\} \approx 5.16 \\
\|B\|_2 &\approx 3.77 \quad \texttt{>> max(sqrt(eig(transpose(conj(B))*B)))}
\end{aligned}$$

$\|B\|_2$ händisch:

$$\begin{aligned}
& & 0 &= \det(A^T A - \mu E_2) \\
& & &= \det\left(\begin{pmatrix} 6 & 5+i \\ 5-i & 11 \end{pmatrix} - \mu E_2\right) \\
& & &= \mu^2 - 17\,\mu + 40 = 0 \\
&\Leftrightarrow & \mu_{1,2} &= \frac{1}{2}(17 \pm \sqrt{129}) \\
&\Rightarrow & \|B\|_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}(17 + \sqrt{129})} \approx 3.77
\end{aligned}$$

Lösung 3:

$$\begin{aligned}
& & A\,x &= y \\
&\Leftrightarrow & (D+L+R)\,x &= y \\
&\Leftrightarrow & (D+L)\,x &= y - R\,x \\
&\Leftrightarrow & x &= (D+L)^{-1}\,y - (D+L)^{-1}\,R\,x \\
&\Rightarrow & x^{k+1} &= \underbrace{-(D+L)^{-1}\,R}_{=T}\,x^k + \underbrace{(D+L)^{-1}\,y}_{=z} \\
& & &= T\,x^{k+1} + z \\
&\Rightarrow & T &= -(D+L)^{-1}\,R
\end{aligned}$$

Lösung 4:

(a) Das Verfahren konvergiert für die Matrix B, nicht für Matrix A.

(b) Das Verfahren konvergiert für die Matrix B, nicht für Matrix A. Das konvergente Verfahren benötigt weniger Iterationen, um bei gleicher Toleranz ein vorgegebenes Residuum, zu unterschreiten als das Jacobi-Verfahren.

(c) Die Wahl des Startwerts spielt keine Rolle.

Lösung 5:

- Das Verfahren konvergiert nicht.
- `>> norm(T,2)` mit
$$T = I - M^{-1}$$
liefert den Wert `NaN`, was "not a number" bedeutet. Das liegt daran, dass M Nullen auf der Diagonale enthält und somit bereits M^{-1} gar nicht existiert.
- Da sich die Matrix A auch durch gut durchdachte Zeilenumformungen nicht in eine Matrix mit nicht Null Einträgen in der Diagonalen umformen lässt, würde ich hier zu einem anderen Verfahren wechseln.