Blatt 2: Taylor-Approximation **MNEU**

Aufgabe 1 (Theorieteil - Restgliedabschätzung):

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \ln(x^2)$$

auf $I = [0.5, 2]$ und ihre n-te Ableitung

$$f^{(n)}(x) = 2\,(-1)^{n-1}(n-1)!\frac{1}{x^n}\ ,\ n > 0$$

(a) Überzeugen Sie sich von der Korrektheit der n-ten Ableitung!!!

(b) Wie lautet die Taylorreihe von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$?

(c) Welches ist der Konvergenzbereich $K = (x_0 - \varrho, x_0 + \varrho)$ der Reihe? Prüfen Sie auch die Intervallgranzen.

(d) Führen Sie eine Restgliedabschätzung für $R_{f,3}(1, x)$ durch.

(*) Denken Sie mal darüber nach, ob Sie einen Bereich für das Restglied angeben können. Also was ist im schlimmsten Fall noch der best- und was der schlechtmöglichste Fehler? **Tipp:** Sie schätzen $|x|$ und $|\zeta|$ ab. Das schlechteste x tritt ja auf jeden Fall ein, aber bei ζ ist das ja nicht zwingend so. Welcher Fehler ergibt sich, beim schlechtesten x und bestem ζ? Dieser Wert liefert Ihnen eine Untergrenze des Fehlers.

(e) Könnte die Wahl eines anderen Entwicklungspunktes x_0 zu besseren Ergebnissen führen? Welchen Entwicklungspunkt statt 1 würden Sie auf $I = [0.5, 2]$ wählen? Führen Sie zu Ihrem neuen Entwicklungspunkt eine Restgliedabschätzung für $n = 3$ durch:

$$\max_{x \in I} |R_{f,3}(x_0^{\text{neu}}, x)| \leq ?$$

Aufgabe 2 (praktischer Teil):

(a) Schreiben Sie in der Datei `Newton/MyTaylor.m` eine Subfunktion `DLN(x,n)`, die die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = \ln(x^2)$ berechnet.

(b) Passen Sie die Parameter in MyTaylor auf `I = [0.5 2]; N = 3; x0 = 1; x = I(1):h:I(2);` an und berechnen Sie h so, dass das Intervall I in 150 Teilintervalle zerlegt wird.

(c) Berechnen Sie das Taylorpolynom $T_{f,3}(x_0, x)$. Erstellen Sie einen Plot mit f und $T_{f,3}(1, \cdot)$.

(d) Belegen Sie ein Feld ye $\in \mathbb{R}^{\mathrm{DIM}}$ mit den Funktionswerten von f und ein Feld y $\in \mathbb{R}^{\mathrm{DIM}}$ mit den Funktionswerten des berechneten Taylorpolynoms $T_{f,3}(1, \cdot)$. Die Matlabfunktion `norm(y-ye,inf)` liefert Ihnen nun den Fehler in der Maximumnorm

$$\|f - T_{f,3}(1, \cdot)\|_\infty = \|R_{f,3}(1, \cdot)\|_\infty \,.$$

Berechnen Sie diesen, lassen Sie ihn ausgeben und vergewissern Sie sich, dass er unterhalb des von Ihnen theoretisch abgeschätzten Wertes liegt.

(e) Ermitteln Sie mit Ihrem Programm welchen Polynomgrad Sie wählen müssen, um

$$\|f - T_{f,n}(1, \cdot)\|_\infty \|R_{n,f}(1, \cdot)\|_\infty = \max_{x \in I} |R_{n,f}(1, x)| < 10^{-1}$$

zu erhalten.

(f) Wählen Sie nun als Entwicklungspunkt, dasjenige x_0^{neu}, das Sie sich im theoretischen Teil überlegt haben. Ermitteln Sie abermals mit Ihrem Programm welchen Polynomgrad Sie wählen müssen, um

$$\|f - T_{f,n}(x_0^{\mathrm{neu}}, \cdot)\|_\infty\| = R_{n,f}(x_0^{\mathrm{neu}}, \cdot)\|_\infty = \max_{x \in I} |R_{n,f}(x_0^{\mathrm{neu}}, x)| < 10^{-1}$$

zu erhalten. Hat sich die Situation tatsächlich verbessert?

(g) Untersuchen Sie die Situation, wenn Sie das Intervall auf $I = [0.5, 2.2]$ erweitern.

(h*) Jetzt wieder $I = [I(1), I(2)] = [0.5, 2]$. Das Intergral der Funktion $f(x) = \ln x^2$ können wir näherungsweise durch das Integral des Taylorpolynoms berechnen:

$$\int_I \ln x^2 \, dx \approx \int_I T_{f,n}(x_0, x) \, dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \int_I (x - x_0)^k \, dx$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!} (x - x_0)^{k+1} \Big|_I = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{(k+1)!} \left((I(2) - x_0)^{k+1} - (I(1) - x_0)^{k+1} \right)$$

Schreiben Sie dazu eine Funktion in der Funktionsdatei `Taylor/MyTaylorINtegral.m` der Form `function y=MyTaylorINtegral(df,x0,n,a,b)`, wobei $I = [a, b]$ ist. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Lösung. Die Stammfunktion von f ist $F(x) = x\,(\ln x^2 - 2)$.

Lösung 1:

(a) ✓

(b)

$$T_f(1,x) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}(x-1)^k$$

(c)

$$\begin{aligned} & & a_k &= \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ \Rightarrow & & \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \left|\frac{k}{k+1}\right| \to 1 \; (k \to \infty) \\ \Rightarrow & & \varrho &= 1 \\ \Rightarrow & & K &= (0,2) \end{aligned}$$

Intervallgrenzen prüfen:

x=0:

$$T_f(1,0) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \qquad \text{divergent}$$

x=2:

$$T_f(1,2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}(-1)^{k+1} \qquad \text{konvergent (Leibnizkrit.)}$$

Daraus ergibt sich der Konvergenzbereich

$$K = (0,2]\,.$$

(d)

$$\begin{aligned} |R_{f,3}(1,x)| &= \left|\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}(x-1)^4\right| \\ &= \left|\frac{2\,(-1)^3 3! \frac{1}{\zeta^4}}{4!}(x-1)^4\right| \\ &= \frac{1}{2\,|\zeta|^4}|x-1|^4 & |x-1| \le 1 \qquad (1) \\ &= \frac{1}{2\,|\zeta|^4} & |\zeta| \ge \frac{1}{2} \qquad (2) \\ &= 2^3 & (3) \end{aligned}$$

Die Abschätzung von (1) auf (2) ist eine scharfe Abschätzung, da $x = 2$ ja tasächlich vorkommt, während die Abschätzung von (2) auf (3) keine scharfe ist, denn ζ könnte irgendwas aus $[0.5, 2]$ sein. Wir nehmen den "schlimmsten" Fall, nämlich $\zeta = \frac{1}{2}$ an. Der "beste" Fall, von dem wir aber nicht ausgehen können, der aber möglich ist, ist $\zeta = 2$. Für diesen Wert erhielten wir dann bei $x = 2$

$$|R_{f,3}(1,2)| = \frac{1}{2\,|\zeta|^4} \geq 2^{-5} = 3.125 \cdot 10^{-2}$$

Für den maximalen Fehler, können wir also folgende Eigenschaft erwarten:

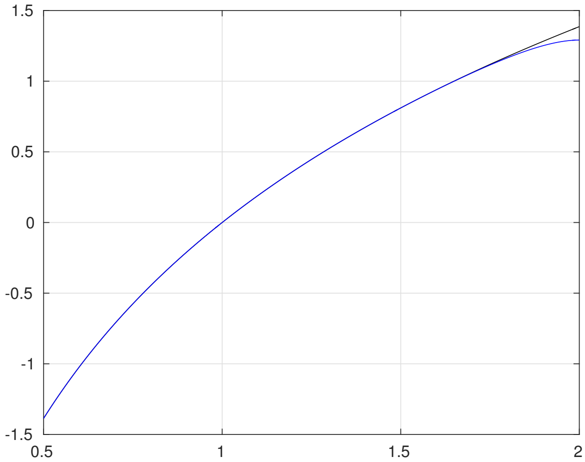
$$3.125 \cdot 10^{-2} \leq \|f - T_{f,3}\|_\infty \leq 8$$

Lösung 2:

(a) Taylor/MyTaylor.m

(b)
```
I = [0.5 2];
N = 3;
x0 = 1;
DIM = 151;
h = (I(2)-I(1))/(DIM-1);
x  = I(1):h:I(2);
```

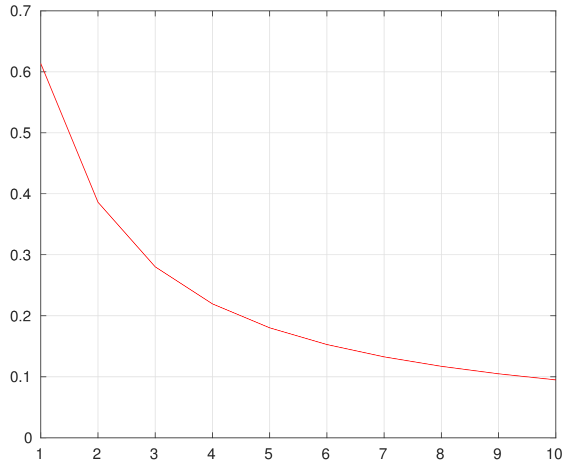
(c) Sie sollten ungefähr diesen Plot erzeugt haben:



(d)
```
>> MyTaylor
Error =
   0.2804
```

(e) Fehler des Taylorpolynoms $T_{f,n}(1,x)$ zur Originalfunktion f in der Maximumnorm in Abhängigkeit des Polynomgrads n:

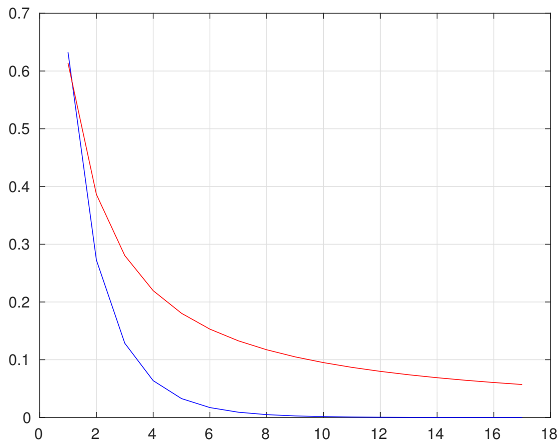
N	$\|\|R_{f,N}(1,\cdot)\|\|_\infty$
1	5.162922e-01
2	2.937078e-01
3	1.922922e-01
4	1.357578e-01
5	1.004382e-01
6	7.670877e-02
7	5.994748e-02
8	4.766932e-02
9	3.842412e-02
10	3.131156e-02



Ab $n = 6$ unterschreitet das Restglied die 10^{-1}-Marke.

(f) Fehler des Taylorpolynoms $T_{f,n}(1,x)$ zur Originalfunktion f für verschiedene Entwicklungspunkte

n	$\|\|R_{f,n}(1,x)\|\|_\infty$	$\|\|R_{f,n}(\frac{5}{4},x)\|\|_\infty$
1	6.14e-01	6.33e-01
2	3.86e-01	2.73e-01
3	2.80e-01	1.29e-01
4	2.20e-01	6.38e-02
5	1.80e-01	3.27e-02
6	1.53e-01	1.71e-02
7	1.33e-01	9.13e-03
8	1.17e-01	4.93e-03
9	1.05e-01	2.69e-03
10	9.50e-02	1.48e-03
11	8.68e-02	8.20e-04
12	7.99e-02	4.57e-04
13	7.40e-02	2.56e-04
14	6.89e-02	1.44e-04



(g) Sie sollten feststellen, dass der Konvergenzbereich bei $x = 2$ eine obere Grenze hat.

(h)

$$\int_I \ln x^2 \, dx \approx \int_I T_{f,20}(1,x) \, dx \approx 0.46$$

Die Funktion: `Taylor/MyTaylorIntegral.m` und der Aufruf im Programm: `Taylor/Blatt2/MyTaylor.m`