Tutorial: Newton-Verfahren 1d

Aufgabenstellung: Wir wollen die nicht lineare Gleichung

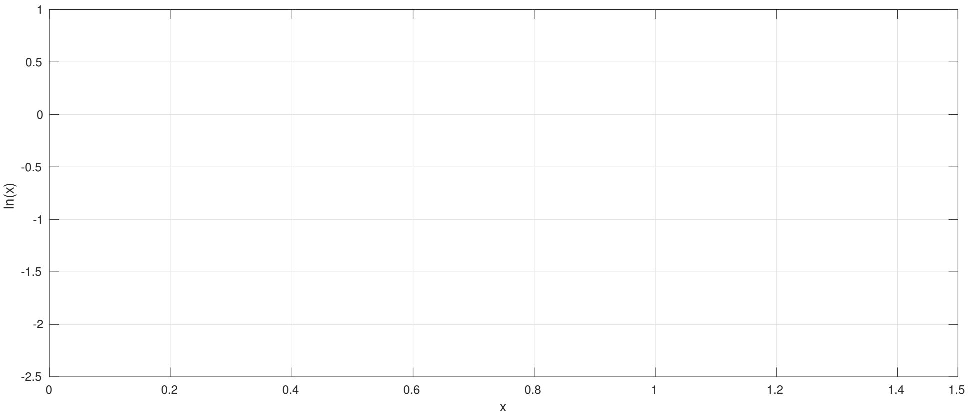
$$\ln x = 0$$

nach x auflösen. Oder anders formuliert: Wir suchen die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \ln x\,.$$

(ohne Kenntnisse über die Umkehrabbildung!)

Schritt A: Graphische Anschauung



1. Zeichnen Sie den Graphen $f(x) = \ln x$ in das obige Achsenkreuz.
2. Zeichnen Sie in die Graphik den Punkt $x^0 = 0.1$ und $(x^0, f(x^0))$ ein.

   $(x^0, f(x^0)) = (0.1, \_\_\_\_\_\_)$

3. Berechnen Sie die Tangentengerade von f am Punkt $(x^0, f(x^0))$.

   $T_{f,x^0}(x)$ = ____________________

4. Zeichnen Sie die Tangentengerade $T_{f,x^0}(x)$ in das obige Achsenkreuz.
5. Berechnen Sie den Schnittpunkt x^1 der Tangentengerade $T_{f,x^0}(x)$ mit der x-Achse.

   $T_{f,x^0}(x^1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^1$ = ______

6. Wiederholen Sie die Schritte A.(2) bis A.(5) zwei Mal:

   $T_{f,x^1}(x)$ = ____________________

   $T_{f,x^1}(x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2$ = _______

   $T_{f,x^2}(x)$ = ____________________

   $T_{f,x^2}(x^3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3$ = _______

Schritt B: Beschreiben des Algorithmus

7. Geben Sie die Tangentengerade an einem beliebigen Punkt $\left(x^k, f(x^k)\right)$ an:

   $T_{f,x^k}(x)$ = __________________________________

8. Geben Sie die Tangentengerade an einem beliebigen Punkt $\left(x^k, f(x^k)\right)$ ausgewertet am Punkt x^{k+1} an:

   $T_{f,x^k}(x^{k+1})$ = __________________________________

9. Überlegen Sie sich mal welchen Wert der Ausdruck in B.(8) bei $x^{k+1} = 2$?

   $T_{f,x^k}\left(x^{k+1}\right)$ = __________________________________

10. Berechnen Sie die Nullstelle x^{k+1} der Tangentengerade $T_{f,x^k}(x)$

    x^{k+1} = __________________________________

Gratuliere! Sie haben den Newton-Algoroithmus hergeleitet.

Schritt C: Implementierung in Matlab

11. Erzeugen Sie das Unterverzeichnis `Programme/NLGS` und darin

12. die Datei `NewtonIteration.m`, die die entsprechend benamte Funktion mit den Übergabeparametern

    input

x0	Startwert
f,df	Zeiger auf die Funktion und deren Ableitungsfunktion
TOL	Toleranz für das Residuum $\lvert f(x) \rvert$
ItMax	Abbruchkriterium im Falle eines Divergenzverhaltens

    output

x	Näherungslösung für die gesuchte Nullstelle
k	Anzahl benötigter Iterationen

    enthält.

13. Definieren Sie die Funktion `NewtonIteration` gemäß folgendem Pseudocode

```
so lange Res>TOL und k<ItMax
  x = x - f(x)/df(x);
  Res = |f(x)|;
```

14. Erstellen Sie das Programm `MyNewton` im Verzeichnis `NLGS`, das die Funktionen

```
f(x) = ln x
df(x) = 1/x
```

    definiert und erzeugen Sie eine graphische Ausgabe im Bereich $[0, 4.5] \times [-5, 20]$.

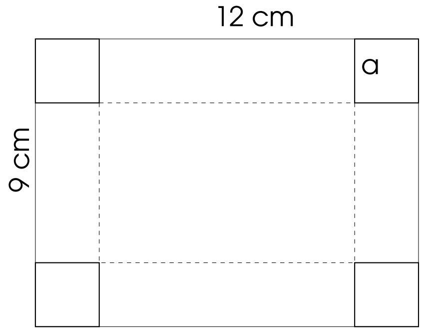
15. Wählen Sie den Startwert $x^0 = 0.5$, die Toleranz `TOL`=10^{-3} und eine maximal mögliche Iterationszahl `ItMax=1000` (sollte ohnehin nicht erreicht werden!) und berechnen Sie durch Aufruf von `NewtonIteration` eine Näherung an die Nullstelle den natürlichen Logarithmus. Plotten Sie den Graphen f und den Näherungswert als roten Kringel.

16. Spielen Sie ein wenig mit dem Startwert. Etwa $x^0 \in \{0.1\,,\ 0.8\,,\ 2\,,\ 2.7\,,\ 3\,,\ 4\}$. Was passiert? Was beobachten Sie?

17. Berechnen Sie theoretisch die Menge $\mathbb{M}$ der "sinnvollen" Startwerte.

Schritt D: Anwendung: Maximierung vom Volumen einer Schachtel

Aus einen Stück Karton der Größe $12\,x\,9$ cm^2 wollen Sie eine Schachtel basteln, die eine Höhe von a cm hat. Wie groß ist die Seitenlänge a der Quadrate, die Sie aus den Ecken des Kartons schneiden, um eine Schachtel mit größtmöglichem Volumen zu erhalten?



18. Wie lautet die Funktion $V(a)$, die das Volumen der Schachtel beschreibt?

    $V(a)$ = ______________________________

19. Wie lautet die Funktion, deren Nullstelle Sie bestimmen wollen?

    _______ = ______________________________

20. Geben Sie nun die Definitionen für die Funktionen `f` und `df` für das Newton-Verfahren an:

    `f` = ______________________________

    `df` = ______________________________

21. Erzeugen Sie mit Matlab graphische Darstellungen von `f` und `df` und diskutieren Sie die Situation in Bezug auf Verwendung des Newton-Verfahrens zur Berechnung eines Maximalwertes.

22. Welches ist das größtmögliche Intervall $\mathbb{M}$ für das die Wahl eines Startwerts x^0 sinnvoll ist?

    $\mathbb{M}$ = _______________

23. Wählen Sie in `MyNewton` die input-Parameter `x0=1`, `TOL=1.0e-08` und `ItMax=1000` und berechnen Sie folgende Daten:

Iterationen	K	$=$	_____________________
Näherungslösung	x^K	$\approx$	_____________________
Residuum	$\lvert f'(x^K)\rvert$	$\approx$	_____________________
größtmögliches Volumen	$\mathrm{V}_{\max}$	$\approx$	_____________________