Tutorial: Newton-Verfahren 1d

Aufgabenstellung: Wir wollen die nicht lineare Gleichung

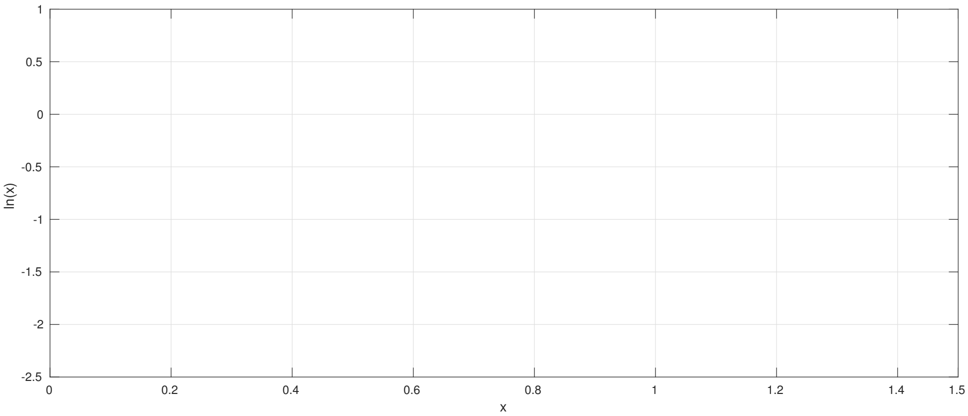
$$\ln x = 0$$

nach x auflösen. Oder anders formuliert: Wir suchen die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = \ln x\,.$$

(ohne Kenntnisse über die Umkehrabbildung!)

Schritt A: Graphische Anschauung



1. Zeichnen Sie den Graphen $f(x) = \ln x$ in das obige Achsenkreuz.
2. Zeichnen Sie in die Graphik den Punkt $x^0 = 0.1$ und $(x^0, f(x^0))$ ein.

   $(x^0, f(x^0)) = (0.1, \_\_\_\_\_\_)$

3. Berechnen Sie die Tangentengerade von f am Punkt $(x^0, f(x^0))$.

   $T_{f,x^0}(x)$ = ____________________

4. Zeichnen Sie die Tangentengerade $T_{f,x^0}(x)$ in das obige Achsenkreuz.
5. Berechnen Sie den Schnittpunkt x^1 der Tangentengerade $T_{f,x^0}(x)$ mit der x-Achse.

   $T_{f,x^0}(x^1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^1$ = ______

6. Wiederholen Sie die Schritte A.(2) bis A.(5) zwei Mal:

   $T_{f,x^1}(x)$ = ________________

   $T_{f,x^1}(x^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2$ = _____

   $T_{f,x^2}(x)$ = ________________

   $T_{f,x^2}(x^3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3$ = _____

Schritt B: Beschreiben des Algorithmus

7. Geben Sie die Tangentengerade an einem beliebigen Punkt $\left(x^k, f(x^k)\right)$ an:

   $T_{f,x^k}(x)$ = ____________________________

8. Geben Sie die Tangentengerade an einem beliebigen Punkt $\left(x^k, f(x^k)\right)$ ausgewertet am Punkt x^{k+1} an:

   $T_{f,x^k}(x^{k+1})$ = ____________________________

9. Überlegen Sie sich mal welchen Wert der Ausdruck in B.(8) bei $x^{k+1} = 2$?

   $T_{f,x^k}\left(x^{k+1}\right)$ = ____________________________

10. Berechnen Sie die Nullstelle x^{k+1} der Tangentengerade $T_{f,x^k}(x)$

    x^{k+1} = ____________________________

Gratuliere! Sie haben den Newton-Algoroithmus hergeleitet.

Schritt C: Implementierung in Matlab

11. Erzeugen Sie das Unterverzeichnis `NLGS` und darin

12. die Datei `NewtonIteration.m`, die die entsprechend benamte Funktion mit den Übergabeparametern

    input

x0	Startwert
f,df	Zeiger auf die Funktion und deren Ableitungsfunktion
TOL	Toleranz für das Residuum $\lvert f(x)\rvert$
ItMax	Abbruchkriterium im Falle eines Divergenzverhaltens

    output

x	Näherungslösung für die gesuchte Nullstelle
k	Anzahl benötigter Iterationen

    enthält.

13. Definieren Sie die Funktion `NewtonIteration` gemäß folgendem Pseudocode

```
so lange Res>TOL und k<ItMax
  x = x - f(x)/df(x);
  Res = |f(x)|;
```

14. Erstellen Sie das Programm `MyNewton` im Verzeichnis `NLGS`, das die Funktionen

```
f(x) = ln x
df(x) = 1/x
```

    definiert und erzeugen Sie eine graphische Ausgabe im Bereich $[0, 4.5] \times [-5, 20]$.

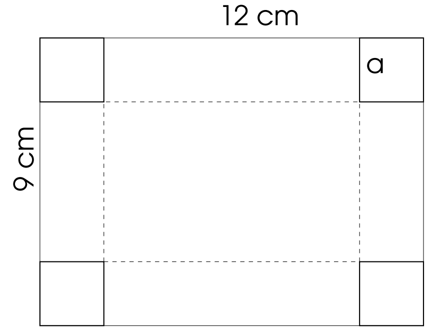
15. Wählen Sie den Startwert $x^0 = 0.5$, die Toleranz `TOL=`10^{-3} und eine maximal mögliche Iterationszahl `ItMax=1000` (sollte ohnehin nicht erreicht werden!) und berechnen Sie durch Aufruf von `NewtonIteration` eine Näherung an die Nullstelle den natürlichen Logarithmus. Plotten Sie den Graphen f und den Näherungswert als roten Kringel.

16. Spielen Sie ein wenig mit dem Startwert. Etwa $x^0 \in \{0.1\,,\ 0.8\,,\ 2\,,\ 2.7\,,\ 3\,,\ 4\}$. Was passiert? Was beobachten Sie?

17. Berechnen Sie theoretisch die Menge $\mathbb{M}$ der "sinnvollen" Startwerte.

Schritt D: Anwendung: Maximierung vom Volumen einer Schachtel

Aus einen Stück Karton der Größe $12\,x\,9$ cm^2 wollen Sie eine Schachtel basteln, die eine Höhe von a cm hat. Wie groß ist die Seitenlänge a der Quadrate, die Sie aus den Ecken des Kartons schneiden, um eine Schachtel mit größtmöglichem Volumen zu erhalten?



18. Wie lautet die Funktion $V(a)$, die das Volumen der Schachtel beschreibt?

    $V(a)$ = ______________________________

19. Wie lautet die Funktion, deren Nullstelle Sie bestimmen wollen?

    _______ = ______________________________

20. Geben Sie nun die Definitionen für die Funktionen `f` und `df` für das Newton-Verfahren an:

    `f` = ______________________________

    `df` = ______________________________

21. Erzeugen Sie mit Matlab graphische Darstellungen von `f` und `df` und diskutieren Sie die Situation in Bezug auf Verwendung des Newton-Verfahrens zur Berechnung eines Maximalwertes.

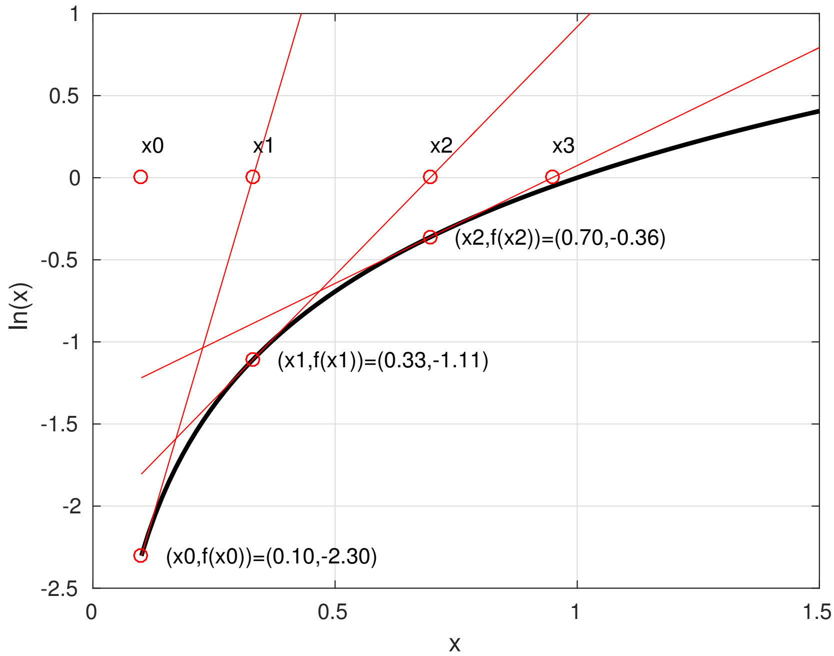
22. Welches ist das größtmögliche Intervall $\mathbb{M}$ für das die Wahl eines Startwerts x^0 sinnvoll ist?

    $\mathbb{M}$ = _______________

23. Wählen Sie in `MyNewton` die input-Parameter `x0=1`, `TOL=1.0e-08` und `ItMax=1000` und berechnen Sie folgende Daten:

Iterationen	K	$=$	_____________________
Näherungslösung	x^K	$\approx$	_____________________
Residuum	$\lvert f'(x^K)\rvert$	$\approx$	_____________________
größtmögliches Volumen	$V_{\max}$	$\approx$	_____________________

1-6



$$
\begin{aligned}
x^0 &= 0.1 & f(x^0) &= -2.30 \\
T_{f,x^0}(x) &= 10\,x - 3.3 \\
T_{f,x^0}(x^1) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad x^1 &= 0.33 & f(x^1) &= -1.11 \\
T_{f,x^1}(x) &= 3.03\,x - 2.11 \\
T_{f,x^1}(x^2) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad x^2 &= 0.70 & f(x^2) &= -0.36 \\
T_{f,x^2}(x) &= 1.43\,x - 1.36 \\
T_{f,x^2}(x^3) &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad x^3 &= 0.95 & f(x^3) &= -0.05
\end{aligned}
$$

7.

$$T_{f,x^k}(x) = f'(x^k)\,(x - x^k) + f(x^k)$$

8.

$$T_{f,x^k}(x^{k+1}) = f'(x^k)\,(x^{k+1} - x^k) + f(x^k)$$

9.

$$T_{f,x^k}(2) = f'(x^k)\,(2 - x^k) + f(x^k)$$

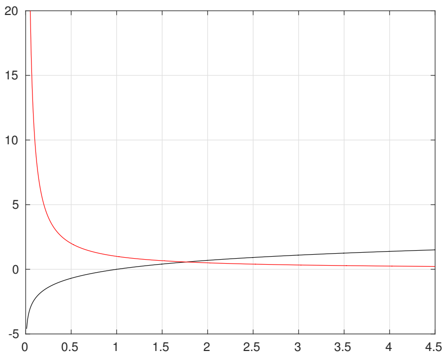
10.

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

13.

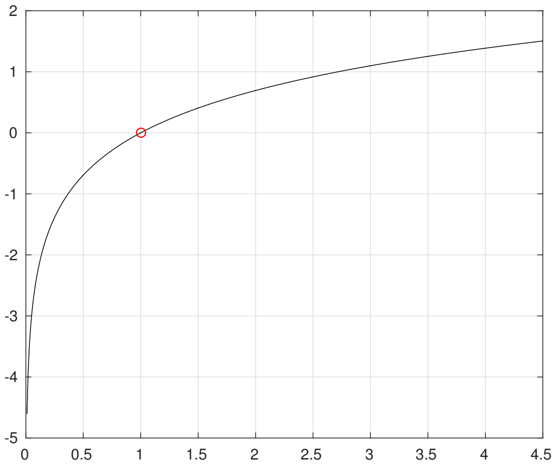
```
function [x k]=NewtonIteration(x0,f,df,TOL,ItMax)

x = x0;
Res = abs(f(x));
k = 0;
while Res>TOL & k<ItMax

  x = x - f(x)/df(x);
  Res = abs(f(x));
  k = k+1;
  fprintf('x_%d = %.8f mit Res = %.2e\n',k,x,Res);

end
end
```

14.




```
f = @(x) log(x);
df = @(x) 1./x;

xx=0:0.01:4.5;
yy=f(xx);

plot(xx,yy,'k-',xx,df(xx),'r-');
grid on
ylim([-5 20]);
```

15.

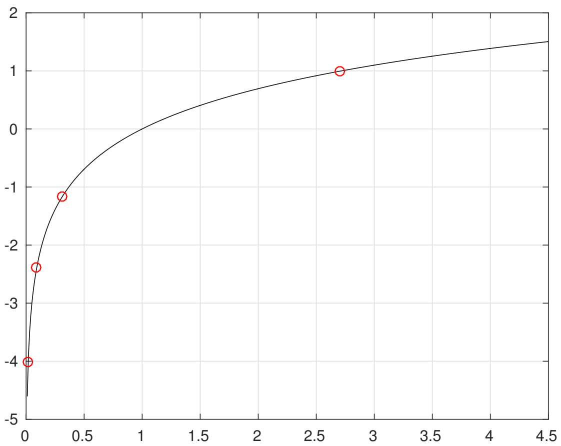


Programmausgabe:

```
>> MyNewton
x^1 = 0.84657359 mit Res = 1.67e-01
x^2 = 0.98757732 mit Res = 1.25e-02
x^3 = 0.99992252 mit Res = 7.75e-05
Nach 3 Iterationen erhalten wir das
Ergebnis 0.9999
```

```
f = @(x) log(x);
df = @(x) 1./x;

x0=0.5;
[x k] = NewtonIteration(x0,f,df,1.0e-03,1000);

fprintf('Nach %d Iterationen erhalten wir das Ergebnis
%.4f\n',k,x);

xx=0:0.01:4.5;
yy=f(xx);

plot(xx,yy,'k-',x,f(x),'ro');
grid on
```

16.



Gewählter Startwert ist $x^0 = 2.7$, dargestellt sind die Näherungen x^1, x^2 und x^3.

17.

$f(x) = \ln x$ ist eine konkave Kurve, denn

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad \text{und} \quad f''(x) = \frac{-1}{x^2} \neq 0 \quad \forall x > 0\,.$$

Da

$$\ln' x \begin{cases} > 1 & \text{für } x > 1 \\ = 1 & \text{für } x = 1 \\ < 1 & \text{für } x < 1 \end{cases}$$

schneidet jede Tangente $T_{f,x^0}(x)$ an f die x-Achse links von $x = 1$. Ein Problem erhalten wir, wenn die Tangente die nicht positive x-Achse schneidet, also wenn für $x^0 > 0$

$$x^0 - \frac{f(x^0)}{f'(x^0)} = x^0\,(1 - \ln x^0) \leq 0$$

gilt. Und das ist der Fall, wenn

$$1 \leq \ln x^0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e} \leq x^0$$

ist. Wir erhalten also keine Lösung wenn wir als Startwert $x^0 \geq \mathrm{e}$ wählen. Damit ergibt sich die Menge $\mathbb{M}$ der sinnvollen Startwerte zu

$$\mathbb{M} = (0, \mathrm{e})$$

18.

$$V(a) = a\,(12 - 2\,a)\,(9 - 2\,a)$$

19.

$$V'(a) = 12\,a^2 - 84\,a + 108$$

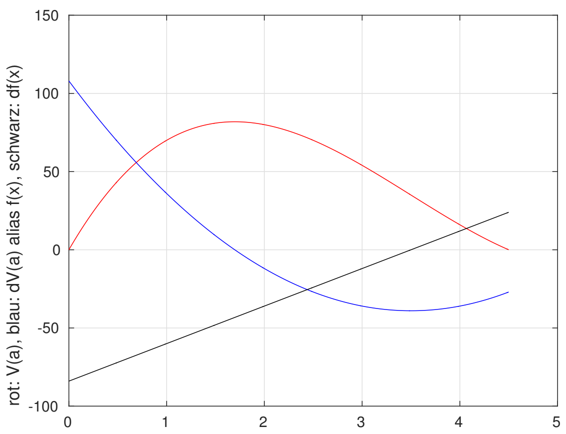
20.

---

f = 10 x^2-84 x+108

df = 20 x-84

21.



Die rote Kurve beschreibt das Volumen der Schachtel in Abhängigkeit der Seitenlänge der ausgeschnittenen Quadrate. Zwischen $x = 1$ und $x = 2$ ist ein Maximum zu vermuten. Die blaue Kurve beschreibt die Ableitung der roten Kurve, also $V'(a)$. Sie hat beim Maximum von $V(a)$ gerade eine Nullstelle; klar. Diese Funktion ist dann unser `f(x)` im Newton-Verfahren, denn von dieser Kurve suchen wir die Nullstelle. Die schwarze Kurve brschreibt `df(x)`, bzw. $V''(a)$. Sie ist im Bereich der gesuchten Stelle negativ, da es sich dort um ein Maximum von $V(a)$ handelt.

22.

Schon aus rein praktischen Gründen kann das Ergebnis nur in $(0, 4.5)$ enthalten sein, da sonst kein dreidimensionales Objekt entsteht. Schaut man sich die Graphen an, so sehen wir, dass $V'(a)$ parabolisch ist und die gesuchte Stelle links des Scheitels $(21/6, f(21/6))$, $f'(21/6) = 0$ liegt. Starten wir rechts vom Scheitel, so wandern wir von der gesuchten Stelle weg. Also gilt

$$\mathbb{M} = \left(0, \frac{21}{6}\right) .$$

23.

```
L = @(x) (12-2*x).*(9-2*x).*x;
f = @(x) 12*x.^2-84*x+108;
df = @(x) 24*x-84;

x0=1;
[x k] = NewtonIteration(x0,f,df,1.0e-08,1000);

fprintf('Nach %d Iterationen erhalten wir das Ergebnis
%.2f\n',k,x);
fprintf('Die Schachtel hat dann das Volumen %.2f\n',L(x));

xx=0:0.01:4.5;

plot(xx,L(xx),'r-',xx,f(xx),'b-',xx,df(xx),'k-');
xlabel('x'); ylabel('rot: V(a), blau: dV(a) alias f(x),
schwarz: df(x)');

grid on
```

Iterationen	K	$= 4$
Näherungslösung	x^K	≈ 1.70
Residuum	$\lvert f'(x^K)\rvert$	$\approx$ 3.52e-11
größtmögliches Volumen	$V_{\max}$	$\approx$ 81.87 (cm^2)

Programmausgabe:

```
>> AnwendungSchachtel
x^1 = 1.60000000 mit Res = 4.32e+00
x^2 = 1.69473684 mit Res = 1.08e-01
x^3 = 1.69722265 mit Res = 7.42e-05
x^4 = 1.69722436 mit Res = 3.52e-11
Nach 4 Iterationen erhalten wir das Ergebnis 1.70
Die Schachtel hat dann das Volumen 81.87
```