

Lineare Algebra für Ingenieure

I & II

Skript zur Vorlesung
(R. Axthelm)



Inhaltsverzeichnis

1	Räume verschiedener Dimensionen	3
1.1	Die Zahlengerade ($\mathbb{1d}$)	4
1.2	Die Komplexen Zahlen	6
1.3	Die Gaußsche Ebene ($2d$)	7
1.3.1	Punkte und Pfeile	7
1.3.2	Messen im \mathbb{R}^2	10
1.3.3	Polarkoordinaten	19
1.4	Der Raum unserer Anschauung ($3d$)	23
1.4.1	Vektoren im \mathbb{R}^3 , wieder Punkte und Pfeile	23
1.4.2	Punkte, Geraden und Ebenen	26
2	Lösen von linearen Gleichungssystemen	33
2.1	Matrizen als solche	34
2.2	Der Gauß-Algorithmus	38
2.3	Berechnung der Inversen einer Matrix mit Gauß	44
2.4	Die Determinante einer Matrix	47
2.5	Lösen eines LGS mit der Cramerschen Regel	50
3	Vektorräume ($n d$)	55
3.1	Der Vektorraum als solcher	55
3.2	Basis und Dimension	57
3.3	Darstellung Vektoren	61
3.4	Vektoren messen	63
4	Lineare Abbildungen	75
5	Eigenwerte und Eigenvektoren	93
5.1	Bedeutung der Determinante für affine Abbildungen	94
5.2	Eigenwerte und Eigenvektoren	96
5.3	Anwendungsbeispiele zu Eigenwerten und Eigenvektoren	104

6	Basiswechsel und Diagonalisierung von Matrizen	112
6.1	Isomorphismen und Koordinatendarstellung	112
6.2	Matrizen von linearen Abbildungen	116
6.3	Basiswechsel und Diagonalisierung	122
6.4	Anwendungsbeispiel zur Diagonalisierung	129
6.4.1	Was ist eigentlich "e hoch Matrix"?.	129
6.4.2	Eine kleine ODE	132
6.4.3	Ein kleines System ODEs	134
6.4.4	Füchse fressen Hasen	135
6.4.5	Die Liebe von Romeo und Julia	138
7	Komplexe Zahlen Teil II	143
7.1	Grundlagen	143
7.2	Potenz und Wurzel von komplexen Zahlen und der schönste Satz der Mathematik	144
7.3	Logarithmus von komplexen Zahlen	149
	Literatur	152
	Symbolverzeichnis	153
	Index	155
	Step-by-Step Anleitung	157

Räume verschiedener Dimensionen

1

Wir behandeln:

- Zahlmengen $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und Körper
- Punkte, Tupel und Vektoren
- Winkel und Längen

Die Mathematik ist eine Sprache, mit der wir Aussagen treffen und Gegebenheiten beschreiben können und das auf - jaja - möglichst einfache Art. Die Mathematik hat den Anspruch einfach zu sein! Also eine Sprache, ja? Die Zahlen sind wie Wörter im Sprachgebrauch. Ganze Zahlmengen umfassen dann quasi einen Teil des Wörterbuchs. Mit Wörtern alleine lassen sich jedoch noch keine Aussagen treffen. Wir müssen Satzkonstrukte schaffen, Wörter miteinander kombinieren. Die Grammatik gibt uns dabei ein Regelwerk zur Hand, damit nicht sowas rauskommt wie "gehe trank Kino Bier gestern ich danach". Gut, an sich haben wir eine grobe Vorstellung wie der Abend verlaufen ist, aber das liegt an unserem Erfahrungsschatz, der dem Gehirn Interpolationen erlaubt. Der Ausdruck selbst liefert keinerlei Information. Beim Aneinanderreihen von Wörtern ergibt sich noch keine Aussage. Halten wir uns an die Regeln der Grammatik wird aus dem obigen Ausdruck sowas wie "Gestern ging ich in's Kino und trank danach ein Bier." Im Grunde genügt auch alleine die Grammatik nicht, denn der Satz "Heute ist es dunkler als kalt." ist grammatikalisch ein korrekter Satz, beinhaltet aber keinerlei Wahrheitsgehalt. In der Mathematik ist ein Ausdruck erst dann eine Aussage, wenn ihm eindeutig ein Wahrheitsgehalt "wahr" oder "falsch" zugeordnet werden kann. Aber das ist jetzt gar nicht das Thema sondern: Wir brauchen Worte, das werden hier Zahlen und Zahlmengen sein und wir brauchen Regeln, wie wir die Zahlen kombinieren, damit etwas brauchbares dabei rauskommt. Diese Regeln sind Verknüpfungen, die wir meistens Addition und Multiplikation nennen. Klingt jetzt sehr pathologisch, aber lassen Sie sich überraschen.

1.1 Die Zahlengerade (1d)

Definition 1.1 (Zahlmengen).

<i>natürliche Zahlen</i>	$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
	$\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
<i>ganze Zahlen</i>	$\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$
<i>rationale Zahlen</i>	$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$
<i>reelle Zahlen</i>	\mathbb{R}

Ein Körper ist im mathematischen Teilgebiet der Algebra eine ausgezeichnete algebraische Struktur, in der die Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf eine bestimmte Weise durchgeführt werden können¹.

Definition 1.2 (Körper). *Ein Körper $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ ist eine Menge \mathbb{K} versehen mit zwei Verknüpfungen “+” und “ \cdot ” (die Addition und Multiplikation genannt werden), für die folgende Bedingungen erfüllt sind:*

Additive Eigenschaften

- (K1) $a + (b + c) = (a + b) + c$ (Assoziativgesetz)
- (K2) $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)
- (K3) $\forall a \in \mathbb{K} \exists \mathbb{0} \in \mathbb{K} \mid a + \mathbb{0} = a$ (neutrales Element)
- (K4) $\forall a \in \mathbb{K} \exists a_A \in \mathbb{K} : a_A + a = \mathbb{0}$ (additives Inverses)

Multiplikative Eigenschaften

- (K5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (Assoziativgesetz)
- (K6) $a \cdot b = b \cdot a$ (Kommutativgesetz)
- (K7) $\forall a \in \mathbb{K} \exists \mathbb{1} \in \mathbb{K} \mid a \cdot \mathbb{1} = a$ (neutrales Element)
- (K8) $\forall a \in \mathbb{K} \exists a_M \in \mathbb{K} : a_M \cdot a = \mathbb{1}$ (multiplikatives Inverses)

Additive und Multiplikative Eigenschaften

- (K9) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (Links-Distributivgesetz)
- (K10) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ (Rechts-Distributivgesetz)

Wir schreiben auch kurz \mathbb{K} anstatt $(\mathbb{K}, +, \cdot)$. Elemente eines Körpers heißen Skalare.

¹Die Bezeichnung Körper wurde im 19. Jahrhundert von Richard Dedekind eingeführt.

Die Schwierigkeit im Moment besteht darin, Wissen, das wir bereits haben auszuklammern. Zum Beispiel ist uns ja seit der Primarschulzeit klar, dass $a \cdot 0 = 0$ gilt. Kriegt man keine Bonbons dann hat man halt auch keine. Basta. Für uns jetzt ist das aber nicht klar, denn das ist ein Sachverhalt, der nicht direkt in den Körperaxiomen festgehalten wird. Das muss man sich erst mal zurechtbeweisen:

Beispiel 1 Beweis, dass $a \cdot 0 = 0$.

$$\begin{aligned}
 0 &= a \cdot 0 - a \cdot 0 && \square \\
 &= a \cdot (0 + 0) - a \cdot 0 && \square \\
 &= a \cdot 0 + a \cdot 0 - a \cdot 0 && \square \\
 &= a \cdot 0 + 0 && \square \\
 &= a \cdot 0 && \square
 \end{aligned}$$

Überlegen Sie welche Körperaxiome in den jeweiligen Schritten zum Beweis verwendet wurden. Versuchen Sie die Schritte noch einmal aufzuschreiben, indem Sie 0 durch $\mathbb{0}$ und $-a$ durch a_A ersetzen.

Beispiel 2

Welche der Zahlmengen \mathbb{R} , \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} bilden mit der üblichen Addition und Multiplikation einen Körper?

Beispiel 3 Die Zahlmenge $\{0, 1\}$ versehen mit folgenden Regeln der Addition und Multiplikation bildet einen Körper.

$$\begin{array}{c|cc}
 + & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 1 \\
 1 & 1 & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{c|cc}
 \cdot & 0 & 1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 1
 \end{array}$$

Bisher haben wir Zahlen auf der Zahlengeraden \mathbb{R} betrachtet und sind damit in einer Raumdimension geblieben. Mathematisch werden wir den Begriff der Dimension später präzisieren. Im Moment begnügen wir uns mit einer intuitiven Vorstellung davon. Es ist nun an der Zeit, die eindimensionale Welt zu verlassen!

Der Körper als solcher wird uns zunächst unsichtbar im Hintergrund begleiten. Im folgenden Kapitel befassen wir uns mit höherdimensionalen Räumen auf einer rein anschaulichen Ebene. Erst im Kapitel 3 werden wir die Situation abstrahieren und dort wird uns dann der Begriff Körper wieder begegnen.

1.2 Die Komplexen Zahlen

Definition 1.3 (Komplexe Zahlen). Die Zahlmenge \mathbb{C} mit

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R} \wedge i^2 = -1\}$$

heißt Menge der Komplexen Zahlen. Für eine komplexe Zahl $c = (x + iy) \in \mathbb{C}$ heißt

$$\operatorname{Re}(c) := x \text{ Realteil,}$$

$$\operatorname{Im}(c) := y \text{ Imaginärteil und}$$

$$\bar{c} := x - iy \text{ konjugiert komplexes von } c.$$

Beispiel 4

Wie ergeben sich Regeln für Subtraktion und Division von komplexen Zahlen? Sie addieren, bzw. multiplizieren wie gewohnt und "sammeln" dann jeweils alle Ausdrücke des Real- und Imaginärteils.

Addition von $a = 2 + i3$ und $b = 5 - i6$:

$$a + b = 2 + i3 + 5 - i6 = 7 - i3$$

Multiplikation von $a = 2 + i3$ und $b = 5 - i6$:

$$a \cdot b = (2 + i3) \cdot (5 - i6) = 10 + i15 - i12 - i^2 18 = 28 + i3$$

Rechenregeln für komplexe Zahlen: Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = a + ib$ und $w = c + id$.

Addition/Subtraktion:

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

Multiplikation:

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + da)$$

konjugiert Komplexe:

$$\bar{z} = a - ib$$

Betrag:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Division:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{ac + bd}{|w|^2} + i \frac{bc - da}{|w|^2}$$



Jede Operation mit komplexen Zahlen liefert wieder eine Zahl, die sich in Real- und Imaginärteil zerlegen läßt.

Satz 1.4. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ bildet einen Körper.

Beweis Satz 1.4:

Es seien $z, w, v \in \mathbb{C}$.

- (K1) $z + (w + v) = (z + w) + v$ (Assoziativgesetz)
 (K2) $z + w = w + z$ (Kommutativgesetz)
 (K3) $\mathbf{n}^+ = 0 + 0 \cdot i$ (neutrales Element bezüglich der Addition)
 (K4) $-z$ (additives Inverses)
 (K5) $z \cdot (w \cdot v) = (z \cdot w) \cdot v$ (Assoziativgesetz)
 (K6) $z \cdot w = w \cdot z$ (Kommutativgesetz)
 (K7) $\mathbf{n}^* = 1 + 0 \cdot i$ (neutrales Element bezüglich der Multiplikation).
 (K8) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ (multiplikatives Inverses)
 (K9) $z \cdot (w + v) = z \cdot w + z \cdot v$ (Links-distributivgesetz)

□

Rechenregeln für konjugiert komplexe Zahlen:

$$\begin{array}{lll}
 (a) & \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 & \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\
 (b) & \overline{\bar{z}} = z & \\
 (c) & \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, & \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}
 \end{array}$$

Bei der Definition der komplexen Zahlen haben wir aber bereits zwei Zahlengeraden kombiniert. Eine für den Realteil einer komplexen Zahl und eine für den Imaginärteil. Damit haben wir im Grunde eine weitere Raumdimension hinzugenommen. Wenn man sich die Zahlengeraden als Stangen vorstellt, mit Hilfe derer man eine Ebene aufspannen kann, sollte dieser Sachverhalt auch ohne abstrakte Definition einleuchtend sein.

1.3 Die Gaußsche Ebene (2d)

1.3.1 Punkte und Pfeile

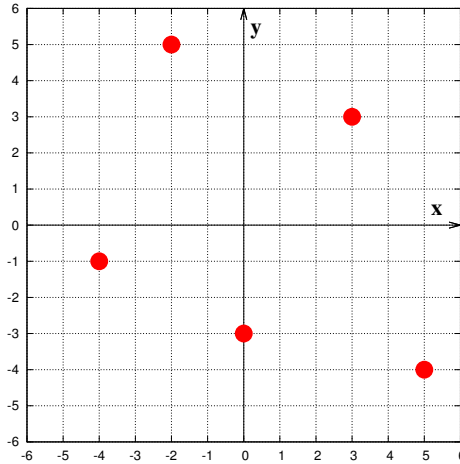
Definition 1.5 (2-Tupel). 2-Tupel sind Punktepaare (x, y) , deren Komponenten x und y jeweils reelle Zahlen, also $x, y \in \mathbb{R}$ sind. Die Menge aller reellen 2-Tupel ist definiert als

$$\mathbb{R}^2 := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

Tupel nennen wir auch Vektoren.

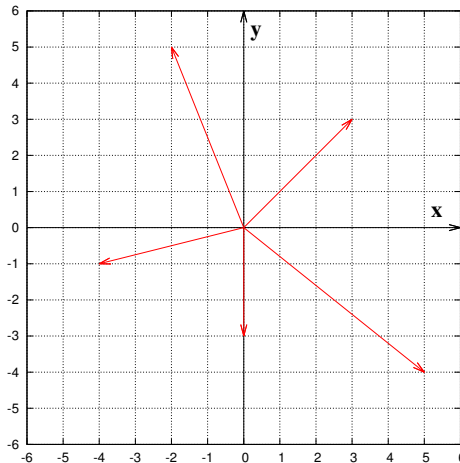
$$\begin{aligned}
 P_1 &= (3, 3) \\
 P_2 &= (5, -4) \\
 P_3 &= (-4, -1) \\
 P_4 &= (-2, 5) \\
 P_5 &= (0, -3)
 \end{aligned}$$

Ordnen Sie den Punkten in der Gaußschen Ebene rechts ihre Namen zu. Zeichnen Sie den Ursprung, das ist der Punkt $(0, 0)$ in der Ebene ein.



$$\begin{aligned}
 v_1 &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} & v_2 &= \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 v_3 &= \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \end{pmatrix} & v_4 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
 v_5 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

2-Tupel oder auch Vektoren kann man als Pfeile darstellen, die vom Ursprung zum entsprechenden Punkt zeigen.



Ob Punkt oder Pfeil ist ganz gleich. Die zwei Darstellungen meinen exakt das selbe, nämlich Vektoren im \mathbb{R}^2 , bzw. Elemente des \mathbb{R}^2 ! Die unterschiedlichen Darstellungen dienen einzig und alleine der besseren Veranschaulichung. Je nach Anwendung ist es besser, sich einen Punkt vorzustellen oder einen Pfeil.



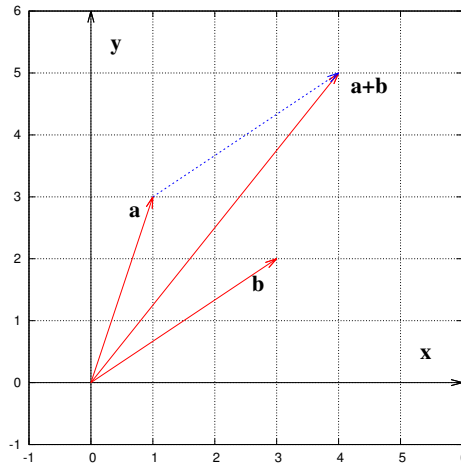
Vektoren als Pfeile starten immer (!!!) im Ursprung. Immer!!! Man nennt sie auch *Ortsvektoren*.

Zwei oder mehr Vektoren addiert man komponentenweise, also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$a+b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+3 \\ 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der blaue, gepunktete Pfeil zeigt die Richtung von b . Wenn man von a startet und in Richtung b "läuft" landet man beim Punkt $a+b$. Dieser sogenannte *Richtungsvektor* (der blaue!) ist kein Vektor bzw. 2-Tupel im Sinne der Definition! Er ist nur eine Art Wegweiser zur Veranschaulichung der Situation. Wir können ihn auch nicht als Punkt interpretieren, oder?

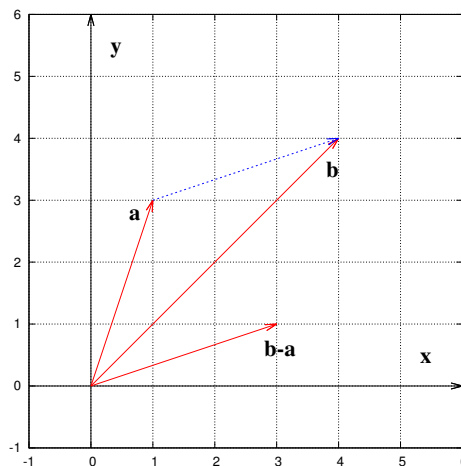


So ein Richtungsvektor hat immer einen Anfangs- und Endpunkt. Im Gegensatz zum Vektor, der nur einen Endpunkt hat da der Anfangspunkt immer der Ursprung ist. Es ist wichtig, diesen Sachverhalt nicht zu vergessen, sonst sind Rechenfehler vorprogrammiert.

Beispiel 7 Vektoren subtrahieren

$$b-a = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der blaue, gepunktete Pfeil zeigt die Richtung von $b-a$, der selbst aber im Ursprung ansetzt. Wenn man von a startet und in Richtung $b-a$ "läuft" landet man beim Punkt b .



Will man tatsächlich eine Strecke zwischen zwei Punkten beschreiben so erfolgt dies durch eine Mengenangabe der Menge aller Punkte, die auf der Verbindungslinie der beiden Endpunkte liegen.

Definition 1.6 (Strecke & Gerade). *Es seien $A, B \in \mathbb{R}^2$ Punkte, dann beschreiben die Parameterdarstellungen*

$$\overline{AB} := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = A + t(B - A), t \in [0, 1]\}$$

die Strecke zwischen A und B und

$$g := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = A + t(B - A), t \in \mathbb{R}\}$$

die Gerade, die durch A und B verläuft. A heißt Stützpunkt und $B - A$ Richtungsvektor von g .

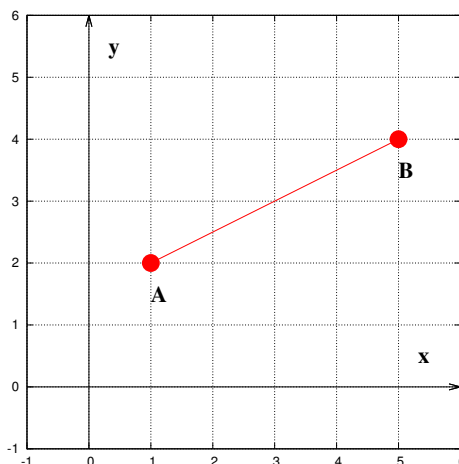
Es gibt noch weitere Darstellungsmöglichkeiten von Punktmengen, die eine Gerade bilden. Die in Definition 1.6 beschriebene Gerade nennen wir auch Parameterdarstellung einer Geraden.

Beispiel 8 Strecke zwischen zwei Punkten

Bei der Strecke von $A = (1, 2)$ nach $B = (5, 4)$ starten wir bei A und "laufen" in Richtung $B - A = (4, 2)$. Die Strecke besteht aus allen Punkten

$$x = A + t(B - A),$$

wobei t alle reellen Zahlen von 0 bis 1 durchläuft. Für $t = 0$ ist $x = A$ und für $t = 1$ ist $x = B$.



Beispiel 9 Gerade in der Ebene

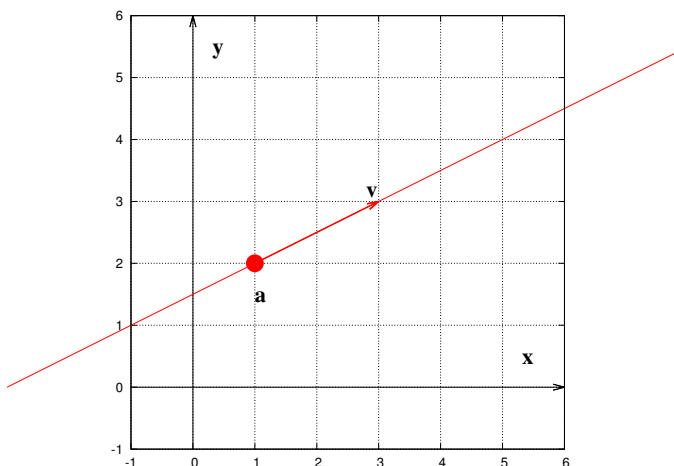
Eine Gerade unterscheidet sich von einer Strecke im Grunde nur dadurch, dass der Parameter t beliebige Werte in \mathbb{R} annehmen darf, denn eine Gerade ist im Gegensatz zur Strecke unendlich lange.

$$g := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = a + tv, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

In der Regel schreiben wir für Geraden auch kurz

$$g : a + tv,$$

wenn klar ist wie es gemeint ist.



1.3.2 Messen im \mathbb{R}^2

Jeder Vektor $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ist durch genau zwei Eigenschaften eindeutig gekennzeichnet. Diese beiden Eigenschaften sind bisher die x_1 - und die x_2 -Komponente. Wir können so ein Vektor aber auch durch Abstand zum Ursprung und den Winkel, den die Strecke $\overline{0x}$

zur positiven x_1 -Achse hat eindeutig bestimmen. Diese beiden Eigenschaften wollen wir nun genau definieren.

Definition 1.7 (Betrag). *Der Betrag eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$ ist der Abstand zum Ursprung und errechnet sich aus dem Satz von Pythagoras zu*

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \left(\sum_{i=1}^2 x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Andere äquivalente Bezeichnungen für den Betrag sind

$$\|x\|, \|x\|_2.$$

Beispiel 10 Betrag Es sei $x = (2, 4)$, dann ist der Betrag von x gegeben durch

$$|x| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4.47.$$

Definition 1.8 (Standardskalarprodukt). *Das Standardskalarprodukt von zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^2$ ist definiert als die Zahl*

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 = \sum_{i=1}^2 x_i y_i.$$

Wir sagen auch kurz Skalarprodukt von x und y .

Beispiel 11 Standardskalarprodukt Es sei $x = (2, 4)$ und $y = (-1, 2)$, dann ist das Standardskalarprodukt die Zahl

$$\langle x, y \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 = -2 + 8 = 6.$$

Rechenregeln für das Skalarprodukt: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a, b, c \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

$$\begin{array}{ll} (a) & \langle \alpha a, b \rangle = \alpha \langle a, b \rangle & (b) & \langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle \\ (c) & \langle a + b, c \rangle = \langle a, c \rangle + \langle b, c \rangle & (d) & \langle a, a \rangle = \|a\|^2 \end{array}$$



Der Skalar α wirkt bei der Multiplikation $\alpha \langle a, b \rangle$ nur auf einen der beiden Argumente des Skalarprodukts. Verwechseln Sie das nicht mit der skalaren Multiplikation von α mit einem Vektor! Dort gilt nämlich $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$.

Beispiel 12 Gilt auch $\langle a, b + c \rangle = \langle a, b \rangle + \langle a, c \rangle$?

Rechenregeln für den Betrag: Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und $a, b \in \mathbb{R}^2$. Dann gilt

- (a) $\|\alpha a\| = |\alpha| \|a\|$
 (b) $\|a\| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
 (c) $\|a + b\| \leq \|a\| + \|b\|$ "Dreiecksungleichung"

Beispiel 13 Im Allgemeinen gilt NICHT $\|a \cdot b\| = \|a\| \|b\|$ für $a, b \in \mathbb{R}^2$! Überzeugen Sie sich davon anhand eines Beispiels.

Der Name Skalarprodukt kommt daher, dass man das Produkt von zwei Vektoren bildet und einen Skalar erhält. Sie erinnern sich daran, dass ein Skalar ein Element eines Körpers genannt wird. Die Werte des Skalarprodukts sollten also sinnvollerweise einem Körper angehören. Im Moment erhalten wir Zahlen in \mathbb{R} und sind damit zunächst auf der sicheren Seite. Eine geometrische Interpretation zum Skalarprodukt können wir uns vor Augen führen sobald wir uns Sachverhalten rund um die Winkelberechnung klar gemacht haben. Also los. Um Winkel zu berechnen, benötigen wir Ausdrücke aus der Trigonometrie.

Definition 1.9 (sin und cos).

Zu einem rechtwinkligen Dreieck mit den Kathetenlängen a und b und der Hypotenusenlänge c , bezeichnen wir den Winkel gegenüber der Kante a mit α und definieren folgende Funktionen:



$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c}$$



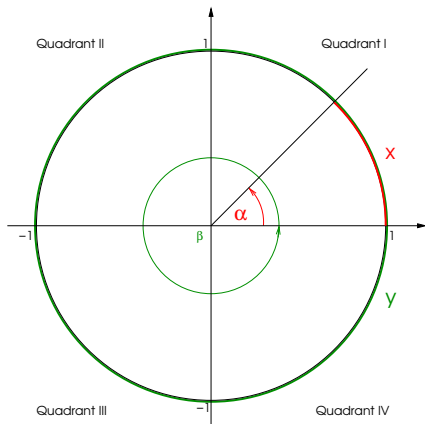
Sinus und Kosinus sind sogenannte trigonometrische Funktionen. Der Begriff Trigonometrie steht für die Beziehung zwischen den Winkeln und den Seitenlängen eines Dreiecks.

tri (drei) gon (ecke) meter (messen)^a

^awww.canoonet.de

Bei der Wahl des Argumentes der Sinusfunktion haben wir die Freiheit, zwischen dem Winkel in Grad mit der Kennzeichnung $^\circ$ oder dem sogenannten Bogenmaß zu wählen. Das Bogenmaß beschreibt die Länge eines Kreisbogens am Einheitskreis, wobei Einheitskreis den Kreis mit Radius 1 meint.

Definition 1.10 (Bogenmaß). *Das Bogenmaß x eines Winkels α ist die Länge des Kreisbogens, der dem Winkel α gegenüber liegt, wenn man ihn im Einheitskreis gegen den Uhrzeigersinn abträgt.*



Umfang des Einheitskreises:

$$\text{Winkel } \beta = 360^\circ$$

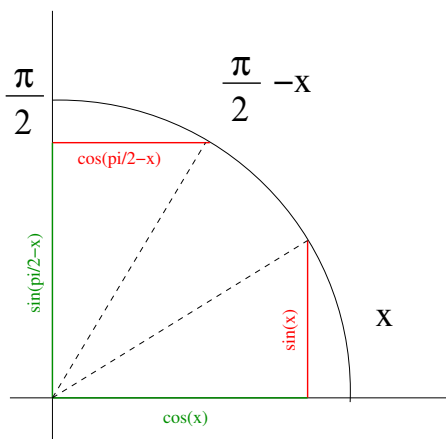
$$\text{Bogenmaß } y = 2\pi$$

Kreisabschnitt:

$$\text{Winkel } \alpha$$

$$\text{Bogenmaß } x = \frac{2\pi}{360^\circ} \alpha$$

Beziehungen zwischen Sinus und Kosinus:



$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$1 = \sin^2 x + \cos^2 x$$

Sie kennen alle den Pythagoras, der besagt, dass für ein Dreieck mit Seitenlängen a, b, c , bei dem die Seiten a und b senkrecht aufeinanderstoßen die Beziehung

$$a^2 + b^2 = c^2$$

gilt. Haben Sie sich schon einmal überlegt, ob die Umkehrung der Aussage auch gilt? Also wenn für ein Dreieck die Beziehung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllt ist, handelt es sich dann auch um ein rechtwinkliges Dreieck? Die Antwort ist ja und wird vom Kosinussatz geliefert.

Satz 1.11 (Kosinussatz). *Es sei ein Dreieck mit Seitenlängen $a, b, c \in \mathbb{R}$ gegeben, wobei $\gamma \in \mathbb{R}$ den Winkel beschreibt gegenüber der Kante mit Seitenlänge c . Dann gilt*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Beweis :

Es gelten die Beziehungen

$$c^2 = h^2 + b_2^2$$

und

$$a^2 = h^2 + b_1^2$$

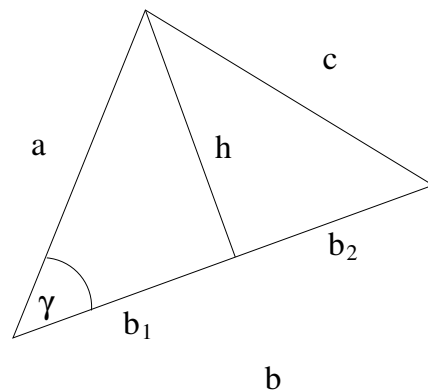
$$= h^2 + (a \cos \gamma)^2$$

Dann ist

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\Leftrightarrow h^2 + b_2^2 = h^2 + a^2 \cos^2 \gamma + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\Leftrightarrow b_2^2 = (b - \underbrace{a \cos \gamma}_{=b_1})^2$$



□

Aus dem Kosinussatz lässt sich dann sofort der Zusammenhang zwischen dem Winkel, der von zwei Vektoren eingefasst wird (folgende Definition) und der Definition des Kosinus aus 1.9 herstellen.

Definition 1.12 (Winkel). Seien $a, b \in \mathbb{R}^2$. Dann heißt die Zahl φ mit

$$\cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\|_2 \|b\|_2}$$

Winkel zwischen den Vektoren a und b . Wir schreiben

$$\varphi = \angle(a, b).$$

Es werde ein Dreieck durch die beiden Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ beschrieben. Die dritte Seite erhalten wir aus $b - a$. Dann liefert der Kosinussatz direkt die Beziehung

$$\|b - a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2 \|a\| \|b\| \cos \varphi$$

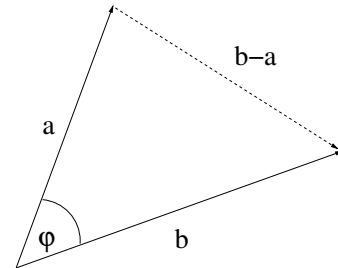
$$\Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{\|b - a\|^2 - \|a\|^2 - \|b\|^2}{-2 \|a\| \|b\|}$$

Betrachten wir nur den Zähler

$$\langle b - a, b - a \rangle - \langle a, a \rangle - \langle b, b \rangle = -2 \langle a, b \rangle$$

so erhalten wir insgesamt

$$\cos \varphi = \frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|}$$



Das ist doch schön. Wir halten hier immerhin eine unglaublich simple Methode zur Berechnung des Winkels in der Hand!



Zur Berechnung des Winkels müssen wir den Arkuskosinus heranziehen. Auf Grund seiner Definition erhalten wir als Ergebnis nur Winkel aus $[0^\circ, 180^\circ]$. Wir erhalten also bei der Berechnung des Winkels zwischen zwei Vektoren immer den inneren Winkel. Wollen wir den äußeren wissen, so müssen wir ihn nachträglich umrechnen.

Beispiel 14 Winkelberechnung

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\angle(a, b) = \arccos \left(\frac{\langle a, b \rangle}{\|a\| \|b\|} \right) = \arccos \left(\frac{5}{\sqrt{26}} \right) \approx \arccos 0.98 \approx 0.2 (\approx 11.47^\circ)$$

$$\angle(a, c) = \arccos \left(\frac{\langle a, c \rangle}{\|a\| \|c\|} \right) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$$

Definition 1.13 (orthogonal, parallel, normiert, orthonormal). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ Vektoren. Gilt*

$$\langle a, b \rangle = 0$$

so treffen die Vektoren im rechten Winkel aufeinander und wir nennen Sie orthogonal sprich "a ortho b" oder auch senkrecht. Gilt hingegen

$$\langle a, b \rangle = \|a\| \|b\|$$

so sind die Vektoren richtungsgleich und heißen *parallel* sprich “*a parallel b*”. Vektoren *a* mit der Eigenschaft

$$\|a\| = 1$$

heißen *normiert*. Vektoren *a* und *b* mit

$$\|a\| = 1, \|b\| = 1 \quad \text{und} \quad \langle a, b \rangle = 0$$

heißen *orthonormal*.

Definition 1.14 (Normalenvektor). Zu jedem Vektor $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

ist der Vektor

$$a^\perp = \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \end{pmatrix}$$

orthogonal. Wir nennen a^\perp den Normalenvektor zu *a*.

Beispiel 15

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow a^\perp = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Skizzieren Sie sich die Situation. Könnte man den Normalenvektor auch anders definieren?

Beispiel 16

Jeder Vektor \hat{a} mit

$$\hat{a} = \frac{a}{\|a\|}$$

hat die Länge 1, d.h. $\|\hat{a}\| = 1$. Versuchen Sie's mal mit

$$a = \begin{pmatrix} 1.3 \\ -4.5 \end{pmatrix}$$

Definition 1.15 (Winkel zwischen zwei Geraden). Der Winkel zwischen zwei Geraden

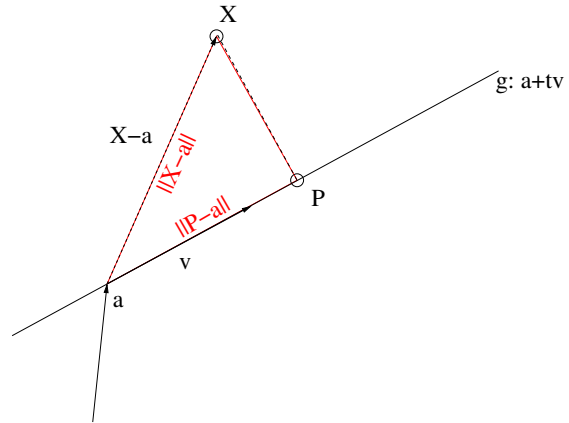
$$g : a + tv \quad \text{und} \quad h : b + sw$$

ist durch den Winkel der beiden Richtungsvektoren *v* und *w* gegeben.

Orthogonale Projektion: Die orthogonale Projektion eines Punktes $X \in \mathbb{R}^2$ auf die Gerade $g : a + tv$ liefert den Punkt $P \in g$, der dem Punkt X am nächsten gelegen ist:

$$P = a + \frac{\langle X - a, v \rangle}{\|v\|^2} v.$$

Für diesen Punkt gilt auch $(X - P) \perp v$.



Das kann man leicht einsehen, denn es gilt wegen der Definition des Kosinus

$$\|P - a\| = \|X - a\| \cos \varphi$$

mit der Definition des Winkels gilt weiter

$$\begin{aligned} &= \frac{\langle X - a, P - a \rangle}{\|P - a\|} = \left\langle X - a, \frac{P - a}{\|P - a\|} \right\rangle \\ &= \left\langle X - a, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle = \frac{\langle X - a, v \rangle}{\|v\|} \end{aligned}$$

Und damit gilt insgesamt

$$P = a + \frac{\langle X - a, v \rangle}{\|v\|} \frac{v}{\|v\|} = a + \frac{\langle X - a, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

□

Beispiel 17

Die orthogonale Projektion des Punktes $X = (4, 1)$ auf die Gerade $g : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich durch

$$\begin{aligned} X - a &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \langle X - a, v \rangle &= 3 \end{aligned}$$

zu

$$P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Definition 1.16 (Distanzfunktion). Seien $M, N \subset \mathbb{R}^2$ Mengen von Punkten im \mathbb{R}^2 . Dann heißt die Funktion $\text{dist} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\text{dist}(N, M) := \min_{x \in M, y \in N} \|y - x\|_2$$

Distanzfunktion.

Die Distanzfunktion misst den Abstand der Punkte von je zwei Mengen, die sich am nächsten sind. Suchen wir nun nach dem Abstand eines Punktes zu einer Geraden, die ja gerade eine Menge ist, so machen wir genau das:

Es sei g eine Gerade und $P \in \mathbb{R}^2$. Dann ergibt sich der Abstand von P zu g durch

$$\text{dist}(P, g) := \min_{x \in g} \|P - x\|_2.$$

Viel interessanter ist Frage danach, wie man diesen Abstand nun berechnet, oder? Der zu P nächstgelegene Punkt in g erhält man zum Beispiel durch die orthogonale Projektion von P auf g .

Abstand eines Punktes zu einer Geraden I:

Seien $a, v \in \mathbb{R}^2$ und eine Gerade $g \in \mathbb{R}^2$ gegeben durch die Parameterdarstellung

$$g(t) = a + tv, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann hat der Punkt $P \in \mathbb{R}^2$ zu g den Abstand

$$\text{dist}(P, g) = \left\| \left(P - a \right) - \frac{\langle P - a, v \rangle}{\|v\|_2^2} v \right\|_2.$$

Abstand zweier paralleler Geraden: Der Abstand zweier paralleler Gerade $g : a + tv$ und $h : b + sw$ mit $v \parallel w$ ergibt sich kurzum aus dem Abstand irgendeines Punktes von g zur Geraden h , oder man wählt irgendeinen Punkt der Geraden h zur Geraden g , d.h.

$$\text{dist}(g, h) = \text{dist}(a, h) = \text{dist}(b, g), \quad \forall a \in g \wedge b \in h.$$

Definition 1.17 (Kreuzprodukt im \mathbb{R}^2). Es seien $a, b \in \mathbb{R}^2$ zwei Vektoren mit

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

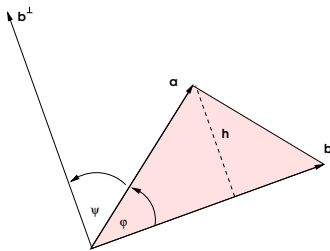
Dann heißt die Zahl

$$a \times b := a_1 b_2 - a_2 b_1$$

das Kreuzprodukt von a und b .



Der Betrag des Kreuzprodukts im \mathbb{R}^2 liefert als Wert den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den beteiligten Vektoren aufgespannt wird, denn es gilt



$$\begin{aligned} a \times b &= a_1 b_2 - b_1 a_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -b_2 \\ b_1 \end{pmatrix} = \langle a, b^\perp \rangle \\ &= \|a\| \|b\| \cos \psi, \quad \psi = \angle(a, b^\perp) \\ &= \|a\| \|b\| \sin \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right) = \|a\| \|b\| \sin \varphi, \quad \varphi = \angle(a, b) \\ &= h \|b\| \quad \text{also Höhe mal Grundseite des Dreiecks.} \end{aligned}$$

Beispiel 18 Es sei das Dreieck T durch die drei Ecken

$$A = (1, 1), \quad B = (3, 2) \quad \text{und} \quad C = (2, 3)$$

gegeben. Dann erhalten wir den Flächeninhalt $|T|$ des Dreiecks durch

$$|(C - A) \times (B - A)| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{2}.$$

Das Kreuzprodukt wird uns im folgenden Kapitel wieder begegnen. Wir werden dann die Rechenregeln formulieren.

1.3.3 Polarkoordinaten

Komplexe Zahlen kann man als Punkte im \mathbb{R}^2 auffassen und entsprechend graphisch darstellen. Es werden dabei der Realteil auf die x -Achse und der Imaginärteil auf der y -Achse aufgetragen. So gesehen können wir komplexe Zahlen auch als Vektoren interpretieren. Sie haben demzufolge einen Abstand zum Ursprung und einen Winkel zur x -Achse. Diese beiden Eigenschaften definieren eine komplexe Zahl ebenso eindeutig, wie ihr Real- und Imaginärteil.

Definition 1.18 (Polarkoordinaten). *Es sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl. Dann heißt*

$$r = \|z\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Betrag von z und

$$\varphi = \text{Arg}(z)$$

Argument von $z \neq 0$. Wir sagen, dass

$$z = a + ib$$

in Kartesischer Form und

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

in Polarform gegeben ist.

Beispiel 19

Es sei $z = 2 + i3$ in kartesischer Form gegeben. Dann ist

$$|z| = \sqrt{13}$$

$$\text{Arg}(z) = \arctan \frac{3}{2} \approx 0.983 (56.3^\circ)$$

z in Polarform lautet dann

$$z = \sqrt{13}(\cos 0.983 + i \sin 0.983).$$

Das Argument: Winkel eines Punktes im \mathbb{R}^2 bezüglich der x -Achse erhalten wir durch die folgende Funktion

$$\text{Arg}(z) := \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{für } x > 0 & (1. \text{ und } 4. \text{ Quadrant}) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{für } x < 0 \wedge y \geq 0 & (2. \text{ Quadrant}) \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{für } x < 0 \wedge y < 0 & (3. \text{ Quadrant}) \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y > 0 & (\text{positive } y\text{-Achse}) \\ -\frac{\pi}{2} & \text{für } x = 0 \wedge y < 0 & (\text{negative } y\text{-Achse}) \\ \text{nicht definiert} & \text{für } x = 0 \wedge y = 0 & (\text{im Ursprung}) \end{cases}$$

Der Definitionsbereich ist

$$\mathbb{D}_{\text{Arg}} = [-\pi, \pi].$$



Wenn wir also das Argument einer komplexen Zahl berechnen müssen reicht der Arkustangens mit seinem Wertebereich $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nicht aus. Wir müssen zu Fuß eine Korrektur vornehmen, je nachdem in welchem Quadranten sich die entsprechende komplexe Zahl in der Gaußschen Ebene befindet.

Wir können nach Belieben zwischen den Darstellungen der kartesischen und der Polarform wechseln. Operationen in kartesischer Form bewirken das Gleiche, wie die entsprechenden in Polarform. Betrachten wir dies anhand der Multiplikation:

Additionstheoreme:

$$\begin{aligned} (AT1) \quad & \sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \\ (AT2) \quad & \sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y \\ (AT3) \quad & \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x \\ (AT4) \quad & \cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

Beweis :

(AT1)

$$\begin{aligned}
\sin x \cos y + \cos x \sin y &= \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix} \\
&= \langle P', Q \rangle \quad \text{mit} \quad P' := \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}, \quad Q := \begin{pmatrix} \cos y \\ \sin y \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\|P'\|}_{=1} \underbrace{\|Q\|}_{=1} \cos \psi \quad \text{mit} \quad \psi = \angle(P', Q) \\
&= \cos \psi
\end{aligned}$$

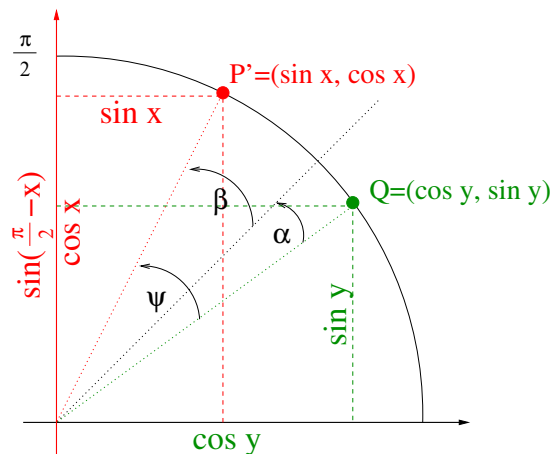
Wir wissen, dass

$$\begin{aligned}
\beta + x &= \frac{\pi}{4} \\
\alpha + y &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

gilt. Daraus folgt dann

$$\psi = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} - (x + y).$$

Mit



$$\cos \psi = \cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (x + y)\right) = \sin(x + y)$$

folgt dann die Behauptung!

(AT2) Wir setzen in (AT1) statt y einfach $-y$ und erhalten mit

$$\sin(x + (-y)) = \sin x \cos(-y) + \cos x \sin(-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

die Behauptung.

(AT3) Wir verschieben, so dass wir den Kosinus in Sinus ausdrücken können, verwenden dann (AT1) und schieben dann das ganze wieder zurück:

$$\begin{aligned}
\cos(x + y) &= \sin\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + (-y)\right) \\
&= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y \\
&= \cos x \cos y - \sin x \sin y
\end{aligned}$$

(AT4) Hier verwenden wir den gleichen Trick wie bei (AT1): Wir setzen $-y$ statt y in die Gleichung (AT3). Dann gilt

$$\cos(x + (-y)) = \cos x \cos y + \sin x \sin y .$$

□

Satz 1.19 (Produkt in Polarform). Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z \cdot w| = |z||w| \quad \text{und} \quad \text{Arg}(z \cdot w) = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w) .$$

Beweis :

Unabhängig von der Art der Darstellung ergibt sich aus der Definition des Betrages

$$|z \cdot w| = \sqrt{z w \bar{z} \bar{w}} = \sqrt{z \bar{z}} \sqrt{w \bar{w}} = |z||w| .$$

Es seien $z = a + ib$ und $w = c + id$ gegeben mit der Darstellung in Polarform:

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = s (\cos \psi + i \sin \psi)$$

Das Produkt in Polarform ergibt

$$\begin{aligned} z \cdot w &= r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \cdot s (\cos \psi + i \sin \psi) \\ &= r s (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi + i (\cos \varphi \sin \psi + \cos \psi \sin \varphi)) \\ &= r s (\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi)) \\ &=: t (\cos \varrho + i \sin \varrho) \\ &=: v \end{aligned}$$

□

Satz 1.20 (Quotient in Polarform). Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

$$w = s (\cos \psi + i \sin \psi)$$

gegeben. Dann gilt

$$\frac{z}{w} = \frac{r}{s} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)) .$$

Beweis :

$$\begin{aligned}
 \frac{z}{w} &= \frac{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)}{s (\cos \psi + i \sin \psi)} \\
 &= \frac{r (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos \psi - i \sin \psi)}{s (\cos \psi + i \sin \psi) (\cos \psi - i \sin \psi)} \\
 &= \frac{r}{s} (\cos \varphi + i \sin \varphi) (\cos \psi - i \sin \psi) \\
 &= \frac{r}{s} (\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi + i(\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi)) \\
 &= \frac{r}{s} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))
 \end{aligned}$$

□



Multiplizieren wir zwei komplexe Zahlen so erhalten wir eine neue komplexe Zahl, deren Betrag sich aus dem Produkt der Beträge der Faktoren und deren Argument sich aus der Summe der Argumente der Faktoren ergibt. Anschaulich ist $z_1 \cdot z_2$ eine Zahl, die aus z_1 durch Streckung um $|z_2|$ und Drehung um den Ursprung mit dem Winkel φ_2 entsteht. Die Multiplikation irgendeiner Zahl z_1 mit z_2 entspricht also einer Drehstreckung.

1.4 Der Raum unserer Anschauung (3d)

Alles was wir in der Gaußschen Ebene veranschaulicht und definiert haben lässt sich auch problemlos formulieren, wenn wir den Raum um eine weitere reelle Zahlengerade erweitern. Wir nennen diesen Raum, den \mathbb{R}^3 , den "Raum unserer Anschauung". Das ist naheliegend, da unsere unmittelbare Umgebung quasi so etwas wie der \mathbb{R}^3 ist; zumindest wenn man nicht allzu pedantisch ist.

1.4.1 Vektoren im \mathbb{R}^3 , wieder Punkte und Pfeile

und wie man sie misst.

Vektoren im \mathbb{R}^3 sind sogenannte 3-Tupel und haben die Gestalt

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad v_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Der Abstand eines Punktes v , oder anders ausgedrückt die Länge eines Vektors v im \mathbb{R}^3 ist gegeben durch die Norm

$$\|v\| = \left(\sum_{i=1}^3 v_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beispiel 20

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14} \approx 3.74$$

Der Winkel zwischen zwei Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch die folgende Beziehung:

$$\langle v, w \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \right\rangle = \sum_{i=1}^3 v_i w_i = \|v\| \|w\| \cos \varphi, \quad \varphi = \angle(v, w)$$

Die Situation fängt an sich ein wenig zu unterscheiden, wenn wir zum Kreuzprodukt übergehen. Im \mathbb{R}^2 ergab das Kreuzprodukt zweier Vektoren eine Zahl, also ein Skalar. Im \mathbb{R}^3 verhält es sich anders. Das Kreuzprodukt liefert uns hier wieder ein Vektor. Wir definieren zunächst:

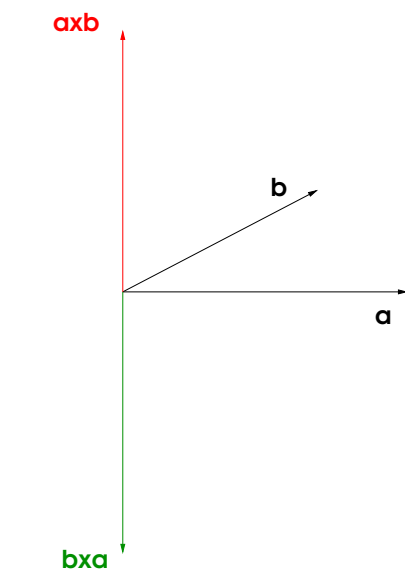
Definition 1.21 (Kreuzprodukt). Seien $a, b \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt der Vektor

$$a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt oder auch äußeres Produkt oder auch Vektorprodukt.

Beispiel 21

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Denn

1. Das Kreuzprodukt ist orthogonal zu den beteiligten Vektoren, d.h. es gilt

$$\langle a, a \times b \rangle = \langle b, a \times b \rangle = 0.$$

2. Der Betrag des Kreuzproduktes $a \times b$ entspricht genau dem Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch a und b aufgespannt wird.

1. Diesen Sachverhalt können Sie leicht nachrechnen, wenn Sie die Definitionen des Kreuz- und des Skalarprodukts und das Ergebnis "aus-x-en".
2. Mit

$$\|a \times b\|_2^2 = \|a\|_2^2 \|b\|_2^2 - \langle a, b \rangle^2,$$

worüber Sie sich in einer Übungsaufgabe klar werden dürfen, gilt dann auch

$$\begin{aligned} \|a \times b\|^2 &= \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 \\ &= \|a\|^2 \|b\|^2 - \|a\|^2 \|b\|^2 \cos^2 \varphi \\ &= \|a\|^2 \|b\|^2 (1 - \cos^2 \varphi) \\ &= \|a\|^2 \|b\|^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad |a \times b| = \underbrace{|b|}_{\text{Grundseite}} \cdot \underbrace{|a| \sin \varphi}_{\text{Höhe}}$$

□

Rechenregeln für das Kreuzprodukt:

- (1) $a \times b = 0 \Leftrightarrow a, b$ richtungsgleich
- (2) $(\lambda a) \times b = \lambda (a \times b) = a \times (\lambda b)$
- (3) $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$
 $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (Distributivität)
- (4) $a \times b = -b \times a$ (Antikommutativität)



Es gilt nicht die Assoziativität:

$$a \times (b \times c) \neq (a \times b) \times c, !$$

Beispiel 22

$$\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

aber

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Punkte, Geraden und Ebenen

Wir haben bereits Punkte und Geraden im \mathbb{R}^2 und Punkte im \mathbb{R}^3 kennengelernt. Da der \mathbb{R}^2 selbst eine Ebene ist, wir haben für den Gegenstand Ebene ja bereits eine gute Vorstellung im Leben entwickeln können, ergab es wenig Sinn, nach Ebenen im \mathbb{R}^2 zu Fragen. Im dreidimensionalen Raum sieht das natürlich anders aus. Wir haben nun schon Punkte, bzw. Vektoren kennengelernt. Betrachten wir nun Geraden im Raum; sollte es ja geben.

Definition 1.22 (Parameterdarstellung einer Geraden im \mathbb{R}^3). Seien $a, v \in \mathbb{R}^3$. Die Parameterdarstellung der Geraden durch den Punkt a in Richtung v lautet

$$g := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + tv, t \in \mathbb{R}\}.$$

Hm. Sieht genauso aus wie die Definition der Parameterdarstellung von Geraden im \mathbb{R}^2 . Ist auch so. Sobald der Raum um eine weitere Raumdimension, oder auch mehrere, erweitert wird, so erhalten wir entsprechend mehr Komponenten in den Tupeln, bzw. Vektoren, aber die Geradendarstellung in ihrer abstrakten Form bleibt gleich. Egal wieviele Dimensionen uns umgeben ist es so, dass wir an einem Punkt im Raum starten und uns in nur eine Richtung - vorwärts oder rückwärts - weiterbewegen und dabei auf Elemente der Geraden treffen.

Um nun eine Ebene aufzuspannen nehmen wir eine weitere Richtung, die selbstredend nicht richtungsgleich, bzw. parallel zur ersteren ist, hinzu:

Definition 1.23 (Parameterdarstellung einer Ebene). Seien $a, v, w \in \mathbb{R}^3$. Die Parameterdarstellung der Ebenen durch den Punkt a in Richtung v und w wird beschrieben durch

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + tv + sw, t, s \in \mathbb{R}\}.$$

Stellen Sie sich vor Sie spannen ohne Schwerkraft mit zwei Stöcken (v und w) eine Seifenhaut auf. Jedes infinitesimal kleine Teilchen der Seifenhaut, die in der Vorstellung nicht unter der Erdanziehungskraft leidet, ist ein Element der Ebene E . Und die Ebene fällt zu einer Geraden zusammen, sobald $w \parallel v$ ist. Dann nämlich, wenn es ein $r \in \mathbb{R}$ gibt mit $w = rv$, fällt die Ebene E

$$E : a + tv + sw = a + tv + sr v = a + (t + sr)v = a + \tilde{t}v : g$$

in eine Gerade g zusammen.

Beispiel 23

$$E_1 : t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_2 : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jeder Punkt $x \in E_2 \subset \mathbb{R}^3$ kann durch die Vektoren, die die Ebene beschreiben dargestellt werden. Es gilt also

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} s &= x_1 \\ t + s &= x_2 \\ 1 + t &= x_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

Jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^3$, der dieser Gleichung genügt gehört ebenfalls zu Menge E_2 . Wir nennen diese Darstellungsform einer Ebene Koordinatendarstellung.

Definition 1.24 (Koordinatendarstellung einer Ebene). Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, dann ist durch

$$E := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0\}$$

eine Koordinatendarstellung der Ebene E in \mathbb{R}^3 gegeben.



Im \mathbb{R}^3 können wir Ebenen in Koordinatendarstellung angeben, Geraden nicht. Im \mathbb{R}^2 können wir Geraden in Koordinatendarstellung beschreiben.

Um zu überprüfen, ob ein Punkt $P = (p_1, p_2, p_3)$ in einer Ebene enthalten ist, müssen wir nachrechnen, ob es Zahlen t , und s gibt, so dass

$$P = a + tv + sw$$

gilt.

Beispiel 24 Es seien die Punkte $P = (1, 1, 1)$ und $Q = (0, 1, 1)$, sowie die Ebene

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Wir wollen prüfen ob $P \in E$, bzw $Q \in E$ gilt.

P :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 = 1 \\ & 1 = t \\ & 1 = 2 \quad \checkmark \\ \Rightarrow \quad & P \in E \end{aligned}$$

Q :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 = 1 \quad \checkmark \\ \Rightarrow \quad & Q \notin E \end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt $\tilde{n} = u \times v$ der Richtungen u und v , die eine Ebene E aufspannen ist ein Vektor, der orthogonal zur Ebene ist. Wenn wir alle Punkte der Ebene mit diesem Normalenvektor multiplizieren erhalten wir das Folgende.

$$\langle x, \tilde{n} \rangle = \langle a, \tilde{n} \rangle + t \underbrace{\langle v, \tilde{n} \rangle}_{=0} + s \underbrace{\langle u, \tilde{n} \rangle}_{=0}$$

Das ist also äquivalent zu

$$\langle x, \tilde{n} \rangle = \langle a, \tilde{n} \rangle .$$

Wir halten das fest:

Von Parameter- zu Koordinatendarstellung einer Ebene im Raum:

Eine Ebene in Parameterdarstellung

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + tv + su, t, s \in \mathbb{R}\}$$

lässt sich in Koordinatendarstellung schreiben als

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot \tilde{n} - a \cdot \tilde{n} = 0\} .$$

Dabei ist $\tilde{n} = u \times v$.

Beispiel 25 Wir betrachten die Ebene aus Beispiel 24

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\langle x, \tilde{n} \rangle - \langle a, \tilde{n} \rangle = x_1 - 1 = 0$$

Die Ebene E in Koordinatendarstellung lautet demnach

$$E: x_1 = 1,$$

das heißt das alle Punkte P mit $p_1 = 1$ zur Ebene gehören. Machen Sie sich eine Skizze der Ebene.

Ist nun eine Koordinatendarstellung einer Ebene gegeben, so gilt doch

$$\begin{aligned} \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 &= -\delta & \alpha \neq 0 \\ \Leftrightarrow x_1 + \frac{\beta}{\alpha} x_2 + \frac{\gamma}{\alpha} x_3 &= -\frac{\delta}{\alpha} \\ \Leftrightarrow x_1 &= -\frac{\beta}{\alpha} x_2 - \frac{\gamma}{\alpha} x_3 - \frac{\delta}{\alpha} \\ \Leftrightarrow x_1 &= -\frac{\beta}{\alpha} t - \frac{\gamma}{\alpha} s - \frac{\delta}{\alpha} \\ x_2 &= t \\ x_3 &= s \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Achtung: Was wenn $\alpha = 0$ ist? Überlegen Sie sich diese Situation mal.

Von Koordinaten- zu Parameterdarstellung einer Ebene im Raum: Zur Koordinatendarstellung der Ebene

$$\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0$$

lautet die Parameterdarstellung

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\delta}{\alpha} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{\beta}{\alpha} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -\frac{\gamma}{\alpha} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, s, t \in \mathbb{R} \right\}$$



Die Darstellungen von Geraden und Ebenen sind nicht eindeutig.

Normale an eine Ebene: Ist

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + tv + su, t, s \in \mathbb{R}\}$$

so ist ein Einheitsnormalenvektor gegeben durch

$$n = \frac{u \times v}{\|u \times v\|_2}.$$

Ist die Ebene hingegen in Koordinatendarstellung

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}\}$$

gegeben so gilt

$$n = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Abstand eines Punktes zur Ebene: Es sei $E \subset \mathbb{R}^3$ gegeben und ein Punkt $a \in E$. Ferner sei n der Einheitsnormalenvektor an E . Dann ist der Abstand des Punktes $P \in \mathbb{R}^3$ zu E gegeben durch

$$\text{dist}(P, E) = | \langle P - a, n \rangle |.$$

Lediglich in der Berechnung von n unterscheidet sich die Formel je nachdem, ob die Ebene in Parameter- oder Koordinatendarstellung gegeben ist.



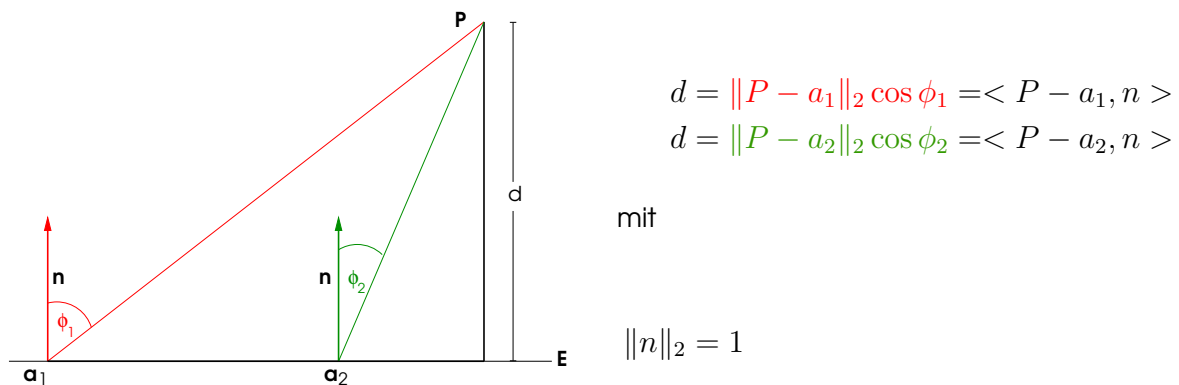
Der Abstand einer Ebene zum Ursprung ist nicht $|\delta|$. Mathematisch formuliert:
Für

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta = 0\}$$

gilt

$$\text{dist}(0, E) \neq |\delta|.$$

Finden Sie es nicht erstaunlich, dass der Wert des Abstands ganz unbeeinflusst davon ist, wie $a \in E$ gewählt wird? Wenn man sich die Formel einmal anschaut ist das ja auf den ersten Blick nicht wirklich einzusehen. Aber auf den zweiten Blick, da schon. Die folgende Seitenansicht der Situation sollte diese Frage klären:



Wir können die Formel zur Berechnung des Abstands von Punkt zur Ebene auch verwenden, wenn wir prüfen wollen, ob eine Ebene einen bestimmten Punkt enthält, denn dann – und nur dann – ist der Abstand ja gerade Null:

$$P \in E \quad \Leftrightarrow \quad \text{dist}(P, E) = 0$$

Sind zwei Punkte $P, Q \in \mathbb{R}^3$ gegeben so verraten uns die Vorzeichen der Skalarprodukte $\langle P - a, n \rangle$ und $\langle Q - a, n \rangle$, ob die beiden Punkte bezüglich E auf der gleichen Seite liegen oder die Ebene zwischen den Punkten liegt. An dieser Stelle sollte man nürlich definieren, was es eigentlich heißt *auf der gleichen Seite bezüglich E* . Sagen wir so:

$$\begin{array}{ll} \overline{PQ} \cap E = \emptyset & P, Q \text{ liegen auf ein und derselben Seite von } E \\ \overline{PQ} \cap E \neq \emptyset & E \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q \end{array}$$

Wir können damit folgendes festhalten:

$$\begin{array}{ll} \langle P - a, n \rangle \langle Q - a, n \rangle > 0 & \text{dann gilt} \quad \overline{PQ} \cap E = \emptyset \\ \langle P - a, n \rangle \langle Q - a, n \rangle < 0 & \text{dann gilt} \quad \overline{PQ} \cap E \neq \emptyset \end{array}$$

Schnitt einer Geraden mit einer Ebene in Koordinatendarstellung:

Es sei

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 + \delta\}$$

und

$$g = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + tv\}$$

Dann ist der Schnittpunkt gegeben durch

$$g \cap E = \begin{cases} a - \frac{\langle a, \tilde{n} \rangle + \delta}{\langle v, \tilde{n} \rangle} v & \text{falls } \langle v, \tilde{n} \rangle \neq 0 \\ g & \text{falls } \langle v, \tilde{n} \rangle = 0 \end{cases},$$

wobei $\tilde{n} = (\alpha, \beta, \delta)^T$.

Es darf dabei $\langle v, \tilde{n} \rangle$ nicht Null sein. Wäre das der Fall so hieße das, dass der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zur Normalen an die Ebene ist, was wiederum bedeutet, dass die Gerade selbst in der Ebene enthalten ist, woraus quasi die Nichtexistenz eines Schnittpunktes, im Sinne von Punkt, folgt.

Ist die Ebene in Parameterform gegeben, etwa

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a + t v + s u\}$$

$$g = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid b + r w\}$$

so setze die beiden Darstellungen gleich $a + t v + s u = b + r w$, beziehungsweise

$$\begin{pmatrix} v_1 & u_1 & -w_1 \\ v_2 & u_2 & -w_2 \\ v_3 & u_3 & -w_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$$

und löse das LGS nach (t, s, r) auf.

Winkel zwischen Gerade und Ebene:

$$g = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = a + t v\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = b + r v_1 + s v_2\}$$

$$\angle(E, g) = \arcsin \left(\frac{\langle v_1 \times v_2, v \rangle}{\|v_1 \times v_2\|_2 \|v\|_2} \right)$$

Schnitte von Ebenen, ganz gleich, ob sie in Parameter- oder Koordinatendarstellung gegeben sind läuft immer auf ein LGS hinaus, welches aufgelöst werden will.

Definition 1.25 (Spurgerade einer Ebene). *Unter den Spurgeraden einer Ebene E verstehen wir die Schnittgeraden von E mit den Grundebenen:*

$$E_{ij} := t e_i + s e_j, \quad e_k = (\delta_{lk})_{l=1, \dots, 3}$$

Winkel zwischen Ebenen: Der Winkel zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 ist gegeben durch den Winkel zwischen den beiden Normalenvektoren \tilde{n}_1 und \tilde{n}_2 an die Ebenen:

$$\angle(E_1, E_2) = \angle(\tilde{n}_1, \tilde{n}_2)$$



Da die Normalenvektoren an eine Ebene im Raum nur modulo Vorzeichen eindeutig sind erhalten wir als Winkel zwischen den Ebenen nicht zwingend den inneren Winkel.

Lösen von linearen Gleichungssystemen

2

Wir behandeln:

- Matrix und Matrizenoperationen
- Aufstellen und Auflösen eines LGS mit Gauß
- Berechnung der Determinante
- Berechnung der Inversen einer Matrix (2 Varianten)
- Auflösen eines LGS mit der Cramerschen Regel

Eine **lineare Gleichung** ist ein Ausdruck der Form

$$4x = 8,$$

bei der eine Unbekannte x von besonderem Interesse ist. Um dieses x zu bestimmen muss eben die Gleichung nach ihm aufgelöst werden. Wir erhalten dann $x = 2$. Wir sagen Gleichung, weil der Ausdruck eine Gleichheit, gekennzeichnet durch das Symbol $=$, benennt. Andernfalls hieße es **lineare Ungleichung**, gekennzeichnet durch ein Symbol $<$, $>$, \leq oder \geq , und wir schreiben etwa

$$4x \leq 8.$$

In diesem Fall gäbe es nicht nur einen Wert für x , der die Ungleichung erfüllt sondern eine ganze Menge davon, nämlich alle x mit $x \leq 2$. Linear nennen wir sowohl Gleichungen also auch Ungleichungen, wenn die gesuchte Größe, hier x , als linearer Ausdruck auftritt. Eine **quadratische Gleichung** ist etwa durch

$$4x^2 = 8$$

gegeben, mit den beiden Lösungen $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$. Es kann auch sein, dass eine Un-/Gleichung keine Lösung hat, wie es bei der **nichtlinearen Ungleichung**

$$4 \cos(x) \geq 8$$

der Fall ist. Es müsste $\cos x \geq 2$ erfüllt sein, aber der Kosinus liefert nur Zahlen zwischen -1 und 1 ! Es gibt also im letzteren Fall keine Lösung. Das ist halt wie im Leben. Manchmal bleibt so'n Problem einfach ungelöst in der Welt.

Wir wollen noch einen Schritt weiter gehen und uns mit **Systemen von linearen Gleichungen** also linearen Gleichungssystemen, kurz LGS, befassen. Grundsätzlich spricht man von einer Zusammenfassung mehrerer linearer Gleichungen, was so aussehen könnte:

$$4x = 8$$

$$2y = 10$$

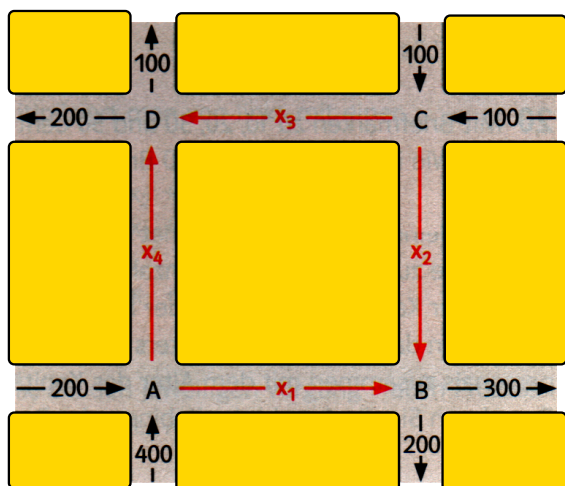
Diese Sorte von LGS sind natürlich nicht sooo interessant, da man sie zeilenweise betrachten kann, indem man jeweils eine lineare Gleichung löst. Wir erhalten dann $x = 2$ und $y = 5$. Klar. Viel interessanter sind sogenannte gekoppelte Gleichungssysteme, bei denen verschiedene Gleichungen voneinander abhängen. Etwa so:

$$\begin{aligned} 4x + y &= 8 \\ 2y - x &= 10 \end{aligned}$$

Wir können die erste Gleichung nach x auflösen, erhalten dann aber eine Lösung, die von y abhängt. Für die zweite Gleichung erhalten wir das gleiche Problem. Ich will gleich die Katze aus dem Sack lassen und Sie nicht weiter auf die Folter spannen: Für letzteres LGS lautet die Lösung $x = \frac{2}{3}$ und $y = \frac{16}{3}$. Wir können uns einfach durch Einsetzen davon überzeugen, aber wie kommt man darauf? Wie entsteht überhaupt so ein LGS? Wie formuliere ich mein Problem gut strukturiert, damit es leichter zu behandeln ist? Das sind Fragen, die uns in diesem Kapitel beschäftigen werden.

Beispiel 26 Geviert

Wir lassen uns von einem kleinen Beispiel begleiten: Bei einem Geviert aus Einbahnstraßen sind die Verkehrsdichten für die zu- und abfließenden Ströme bekannt. Für die Verkehrsdichten x_1 bis x_4 lässt sich die Situation in einem LGS zusammenfassen.



Bei Kreuzung A kommt eine Verkehrsdichte von $200 + 400 = 600$ zusammen, die sich auf die Einbahnstraßen x_1 und x_4 verteilen. Wie im Detail wissen wir nicht. Wir wissen nur $x_1 + x_4 = 600$. Damit haben wir die erste Gleichung des Systems. Sukzessiv fahren wir fort und erhalten insgesamt das LGS

$$\begin{aligned} A : \quad & x_1 + x_4 = 600 \\ B : \quad & x_1 + x_2 = 500 \\ C : \quad & x_2 + x_3 = 200 \\ D : \quad & x_3 + x_4 = 300 . \end{aligned}$$

Das Aufstellen des LGS, also die mathematische Beschreibung einer gegebenen Situation, ist der erste Schritt. Der dritte Schritt, ich greife voraus, besteht darin, das System nach den Unbekannten aufzulösen und dazwischen werden wir das LGS ein wenig umformulieren, es in die sogenannte Matrix-Vektor-Darstellung bringen, um die Handhabung zu vereinfachen.

2.1 Matrizen als solche

Definition 2.1 (Matrix). Eine Matrix A ist eine strukturierte Anordnung von $m \cdot n$ Zahlen aus \mathbb{K} gemäß

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix hat m Zeilen und n Spalten. Wir schreiben anstatt A auch $(A_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$,

oder kurz $(A_{ij})_{ij}$. Ist $m = n$ so heißt die Matrix quadratisch.

Gilt für alle Komponenten, dass $a_{ij} = a_{ji}$ so heißt A symmetrische Matrix.

Die Menge aller $m \times n$ -Matrizen oder auch (m, n) -Matrizen bezeichnen wir mit $\mathbb{K}^{m \times n}$ oder $\mathbb{K}^{(m,n)}$, wobei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Wir können eine $m \times n$ -Matrix auch als ein Zeilenvektor verstehen, dessen n Komponenten wiederum aus Spaltenvektoren aus \mathbb{R}^m besteht; oder eben ein Spaltenvektor, dessen m Komponenten aus Zeilenvektoren aus \mathbb{R}^n besteht.



A_{ij} bezeichnet die i -te Zeile und j -te Spalte. Immer im Sinne

„Zeilen zuerst, Spalten später.“

Addition und skalare Multiplikation erfolgen wie bei Vektoren komponentenweise. Ebenfalls wie bei den Vektoren erhalten wir:

Wir können ein $v \in \mathbb{R}^n$ auch als $v \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ oder $v \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ interpretieren. Genauso sind im Grunde genommen auch Punkte Matrizen.

Definition 2.2 (Gleichheit von Matrizen). Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ heißen gleich, wenn sie komponentenweise übereinstimmen, das heißt

$$A = B \quad :\Leftrightarrow \quad A_{ij} = B_{ij} \quad \forall 1 \leq i \leq m \wedge \forall 1 \leq j \leq n$$

Definition 2.3 (Einheitsmatrix). Mit $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und

$$(E_{ij})_{ij} = (\delta_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

bezeichnen wir die Einheitsmatrix.

Definition 2.4 (Diagonalmatrix). Die Elemente A_{ii} einer quadratischen Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen Hauptdiagonale und $A_{i,i+1}$, bzw $A_{i+1,i}$ heißen Nebendiagonale. Sind alle nicht Hauptdiagonalelemente gleich Null so sprechen wir von einer Diagonalmatrix.

Definition 2.5 (obere/untere Dreiecksmatrix). Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit

$$A_{ij} = 0 \quad \text{für } i > j$$

heißt obere Dreiecksmatrix. A heißt untere Dreiecksmatrix wenn

$$A_{ij} = 0 \quad \text{für } i < j$$

gilt.

Beispiel 27 Verschiedene Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

untere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

Definition 2.6 (Matrixprodukt). Es seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{N \times M}$ und $B \in \mathbb{R}^{M \times L}$ gegeben. Dann ist das Matrixprodukt $A \cdot B$ definiert durch

$$A \cdot B = \left(\sum_{m=1}^M A_{nm} B_{ml} \right)_{1 \leq n \leq N, 1 \leq l \leq L}.$$

Jede Komponente der Produktmatrix $A \cdot B$ ist Ergebnis eines Standardskalarprodukts von Zeilen aus A mit Spalten aus B . Da Vektoren ja auch Matrizen sind können wir folgelogisch auch das Produkt mit Matrizen und Vektoren bilden.



Vorsicht ist darin geboten, dass die Dimensionen im Sinne der Definition 2.6 "passen". Bei einem Matrixprodukt muss die Anzahl der Spalten der "linken" Matrix der Anzahl der Zeilen der "rechten" Matrix entsprechen. Sonst passt es nicht.



$$A \cdot B \neq B \cdot A$$

1. Das Produkt von Diagonalmatrizen ist wiederum eine Diagonalmatrix.
2. Bei Diagonalmatrizen ist das Matrizenprodukt kommutativ.

Beispiel 28	Geviert
-------------	---------

Das LGS des Gevierts aus Beispiel 26 in Matrix-Vektor Darstellung sieht dann so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 500 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}$$

Definition 2.7 (Transponierte einer Matrix). Die Transponierte einer Matrix A ist die Matrix

$$(A^T)_{ij} = A_{ji},$$

deren Spalten, bzw. Zeilen gerade die Zeilen, bzw. Spalten der Matrix A sind.

Satz 2.8. Seien A , B und C Matrizen mit passenden Dimensionen. Dann gilt:

1. $(AB)^T = B^T A^T$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(A + B)C = AC + BC$

Wir können nun ein LGS in Matrix-Vektor Form darstellen und stellen uns folgende Fragen, die wir in den beiden nächsten Unterkapiteln klären wollen:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $y \in \mathbb{R}^m$ gegeben und gesucht $x \in \mathbb{R}^n$ mit

$$Ax = y.$$

1. Gibt es eine Lösung?
2. Wenn nein: Warum nicht?
3. Wenn ja:
 - (a) Warum?
 - (b) Wieviele?
 - (c) Wie sehen die aus?
 - (d) Wie können wir sie berechnen?

2.2 Der Gauß-Algorithmus

Der Gauß-Algorithmus ist eine Methode, wie wir ein LGS nach seinen UNbekannten auflösen können. Dabei wird die Matrix des LGS auf obere/untere Dreiecksgestalt gebracht und dann der Lösungsvektor per rekursivem Einsetzen berechnet.

Das sogenannte Eliminationsverfahren bringt automatisch eine beliebige Matrix auf Stufenform, das ist die Dreiecksgestalt. Anschließend ermittelt die Rekursion, die aus dem LGS, nun dargestellt durch eine obere Dreiecksmatrix, die Lösung.

Zunächst also das **Eliminationsverfahren**: Dazu starten wir mit der ersten Spalte. Die erste Zeile ist dann die Bezugszeile.

$$\text{Bezugszeile} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2N} & y_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3N} & y_3 \\ \vdots & & & & \vdots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & \cdots & a_{NN} & y_N \end{array} \right)$$

Wir teilen jede Zeile i der erweiterten Matrix, das bedeutet, dass wir die rechte Seite y immer mitbehandeln, durch das jeweilige Element der ersten Spalte a_{i1} und erhalten

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1N}}{a_{11}} & \frac{y_1}{a_{11}} \\ 1 & \frac{a_{22}}{a_{11}} & \frac{a_{23}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{2N}}{a_{11}} & \frac{y_2}{a_{11}} \\ 1 & \frac{a_{32}}{a_{11}} & \frac{a_{33}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{3N}}{a_{11}} & \frac{y_3}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 1 & \frac{a_{N2}}{a_{11}} & \frac{a_{N3}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{NN}}{a_{11}} & \frac{y_N}{a_{11}} \end{array} \right)$$

Die Zeilen 2 bis N werden nun durch ihre jeweilige Differenz zur Bezugszeile ersetzt. An Stelle der Bezugszeile setzen wir wieder das Original. Ist aber nicht wichtig. Wir haben nun alle Elemente unterhalb von a_{11} eliminiert.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} & y_1 \\ 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{22}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{23}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1N}}{a_{11}} - \frac{a_{2N}}{a_{11}} & \frac{y_1}{a_{11}} - \frac{y_2}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{32}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{33}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1N}}{a_{11}} - \frac{a_{3N}}{a_{11}} & \frac{y_1}{a_{11}} - \frac{y_3}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \frac{a_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{N2}}{a_{11}} & \frac{a_{13}}{a_{11}} - \frac{a_{N3}}{a_{11}} & \cdots & \frac{a_{1N}}{a_{11}} - \frac{a_{NN}}{a_{11}} & \frac{y_1}{a_{11}} - \frac{y_N}{a_{11}} \end{array} \right)$$

Wir beschreiben das neue System kurz so:

$$\text{Bezugszeile} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} & y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} & y_2^{(1)} \\ 0 & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & \cdots & a_{3N}^{(1)} & y_3^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{N2}^{(1)} & a_{N3}^{(1)} & \cdots & a_{NN}^{(1)} & y_N^{(1)} \end{array} \right)$$

Dann gehen wir zur zweiten Spalte über. Nun ist die zweite Zeile unsere Bezugszeile. Wir dividieren alle Zeilen $i = 2, \dots, N$ durch ihr jeweiliges Element in der zweiten Spalte $a_{i2}^{(1)}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} & y_1 \\ 0 & 1 & \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{2N}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} & \frac{y_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{33}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{3N}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & \frac{y_3^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \frac{a_{N3}^{(1)}}{a_{N2}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{NN}^{(1)}}{a_{N2}^{(1)}} & \frac{y_N^{(1)}}{a_{N2}^{(1)}} \end{array} \right)$$

und ersetzen jede Zeile $i = 3, \dots, N$ durch die Differenz zur Bezugszeile. Die Bezugszeile können wir wieder durch das Original ersetzen. Wir erhalten lauter Nullen unterhalb von $a_{22}^{(1)}$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} & y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} & y_2^{(1)} \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{33}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{2N}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{3N}^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} & \frac{y_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{y_3^{(1)}}{a_{32}^{(1)}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{a_{23}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{N3}^{(1)}}{a_{N2}^{(1)}} & \cdots & \frac{a_{2N}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{a_{NN}^{(1)}}{a_{N2}^{(1)}} & \frac{y_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}} - \frac{y_N^{(1)}}{a_{N2}^{(1)}} \end{array} \right)$$

Wieder schreiben wir für das neue System kurz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1N} & y_1 \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \cdots & a_{2N}^{(1)} & y_2^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \cdots & a_{3N}^{(2)} & y_3^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & a_{N3}^{(2)} & \cdots & a_{NN}^{(2)} & y_N^{(2)} \end{array} \right)$$

Dieses Verfahren führen wir fort bis die Matrix in Stufenform gegeben ist. Ist der $\text{rang}(A) = N$ so hat das LGS nun folgende Gestalt (ohne den oberen Index):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ 0 & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{N-1,N-1} & a_{N-1,N} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{NN} \end{array} \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}$$

Jetzt die **Rekursion**: Die Lösung x erhalten wir nun durch Rückwärtseinsetzen. Wir starten mit

der letzten Zeile

$$\begin{aligned}x_N &= \frac{1}{a_{NN}} y_N \\x_{N-1} &= \frac{1}{a_{N-1,N-1}} (y_{N-1} - a_{N-1,N} x_N) \\x_{N-2} &= \frac{1}{a_{N-2,N-2}} (y_{N-2} - a_{N-2,N-1} x_{N-1} - a_{N-2,N} x_N) \\&\vdots \\x_k &= \frac{1}{a_{kk}} \left(y_k - \sum_{l=k+1}^N a_{kl} x_l \right)\end{aligned}$$



Eins müssen wir noch beachten: Wir dürfen nicht durch Null teilen. Ist das Diagonalelement a_{ii} in der Bezugszeile i gleich Null, so tauschen wir die Bezugszeile gegen eine Zeile $j > i$ mit $a_{ji} \neq 0$ aus. Diesen Prozess nennt man *Pivotisierung*. Ist ein $a_{ji} = 0$, $j > i$ in einer der übrigen Zeilen, so überspringt man diese einfach, da es ohnehin nichts mehr zu eliminieren gibt.

Gibt es die Möglichkeit der Pivotisierung nicht, so ist das LGS nicht oder nicht eindeutig lösbar. Zu diesen Situationen kommen wir jetzt. Am besten veranschaulichen wir uns besondere mögliche Fälle an Hand von Beispielen.

```
/* elimination */
for k=1,N
  if A[k][k] = 0 do
    Pivoting(A,y,k)
  end if
  for i=k+1,N
    if |A[i][k]| > 0 do
      for j=k+1,N
        A[i][j] = A[i][j]/A[i][k]-A[k][j]/A[k][k];
        y[i] = y[i]/A[i][k]-y[k]/A[k][k];
        A[i][k]=0.;
      end for j
    end if
  end for i
end for k

/* RowSum liefert die Anzahl der Nullzeilen in der Matrix.
Der zurückgegebene Wert ist negativ, wenn es keine Lösung
gibt */

Rg = RowSum(A);

/* recursive insertion */
if Rg = N do
  for i=N,1 do
    sum=0.;
    for j=i+1,N do
      sum += A[i][j]*x[j];
    end for j
    x[i] = (y[i]-sum)/A[i][i];
  end for i
end if
```

Abbildung 1: Der Gaußalgorithmus

Beispiel 29

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + 2x_3 &= 6 \\2x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 5 \\2x_1 + 8x_2 + 2x_3 &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 6 \\2 & 3 & 3 & 5 \\2 & 8 & 2 & 2\end{array}\right) &\xrightarrow{\substack{\text{II} - 2\text{I} \\ (\text{III} - 2\text{I})/2}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 6 \\0 & 5 & -1 & -7 \\0 & 5 & -1 & -5\end{array}\right) \\ &\xrightarrow{\text{III} - \text{II}} \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 2 & 6 \\0 & 5 & -1 & -7 \\0 & 0 & 0 & 2\end{array}\right)\end{aligned}$$

In der 3-ten Zeile steht jetzt $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2$, was natürlich direkt auf einen Widerspruch führt. Es gibt also kein x , welches auch nur die dritte Zeile erfüllt, insbesondere auch nicht das ganze LGS. Damit hat dieses LGS keine Lösung.

Tja.

Nehmen wir ein anderes Beispiel. Wie sieht's denn nun mit unserem Straßengeviert aus? Das können wir ja auch mal durchrechnen:

Beispiel 30

Geviert

Wir können nun das LGS aus Beispiel 26 und 28 nach seinen Unbekannten auflösen und mit der Lösung dann folgenden Fragestellungen nachgehen:

- (a) Ist eine Sperrung des Straßenstücks AD ohne Drosselung des Zuflusses möglich?
- (b) Welches ist die minimale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB?
- (c) Welches ist die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück CD?

$$\begin{aligned}x_2 + x_3 &= 200 \\x_1 + x_2 &= 500 \\x_3 + x_4 &= 300 \\x_1 + x_4 &= 600\end{aligned} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\1 & 0 & 0 & 1 & 600 \\0 & 1 & 1 & 0 & 200 \\0 & 0 & 1 & 1 & 300\end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 1 & 0 & 0 & 500 \\0 & 1 & 0 & -1 & -100 \\0 & 0 & 1 & 1 & 300 \\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ -100 \\ 300 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da es sich um Einbahnstraßen handelt müssen alle Komponenten des Lösungsvektors nicht negativ sein. Damit gilt

$$\begin{array}{ll} x_4 \in [100, 300] & x_1 \in [300, 500] \\ x_2 \in [0, 200] & x_3 \in [0, 200] \end{array}$$

- (a) Eine Sperrung des Straßenstücks AD ist nicht möglich.
- (b) Die minimale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück AB ist 300.
- (c) Die maximale Verkehrsdichte auf dem Straßenstück CD ist 200.

Definition 2.9 (Rang). Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Die Anzahl der Pivotelemente in der Stufenform der Matrix heißt Rang der Matrix A und wird mit $\text{rang}(A)$ bezeichnet.

Wir sagen auch ein LGS habe den Rang $\text{rang}(A)$. Die rechte Seite des LGS spielt dabei aber keine Rolle, auch wenn diese zum LGS an sich dazugehört.

Satz 2.10. Sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ mit $\text{rang}(A) = r$. Dann gilt

- (a) r ist gleich der Anzahl der Zeilen, die nicht Nullzeilen sind.
- (b) $0 \leq r \leq \min\{m, n\}$
- (c) Die Stufenform hat $n - r$ Spalten ohne Pivotelement.

Vorgehen beim Lösen eines LGS			
1. System auf Stufenform bringen.			
2. Rangbestimmen $r = \text{rang}(A)$, $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$			
3. Gibt es Nullzeilen?			
ja: $r < m$		nein: $r = m$	
Ist ein Element in $\{y_{r+1}, \dots, y_m\}$ ungleich Null?		$r < n$?	
ja	nein	ja	nein
$\left(\begin{array}{cccc c} \star & & & & \star \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \star & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{cccc c} \star & & & & \star \\ & \ddots & & & \\ 0 & & \star & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{cccc c} 0 & \dots & 0 & \star & \star \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \star \end{array} \right)$	$\left(\begin{array}{ccc c} \star & & \star & \star \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \star & \star \end{array} \right)$
$\mathbb{IL} = \emptyset$	$\text{Dim } \mathbb{IL} = n - r$	$\text{Dim } \mathbb{IL} = n - r$	$\text{Dim } \mathbb{IL} = 0$
"Es gibt keine Lösung"	"Es gibt ∞ viele Lösungen"	"Es gibt ∞ viele Lösungen"	"Es gibt genau eine Lösung"
4. Im Fall, dass es Lösungen gibt: Rekursives Auflösen.			

2.3 Berechnung der Inversen einer Matrix mit Gauß

Definition 2.11 (reguläre & singuläre Matrix). *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist $\text{rang}(A) = n$ so heißt A regulär. Ist eine Matrix nicht regulär so heißt sie singulär.*



Durch das Anwenden von elementaren Zeilenumformungen kann eine reguläre Matrix nicht nur auf obere Dreiecksmatrix, sondern darüberhinaus bis auf Diagonalgestalt gebracht werden. Die Lösung eines LGS kann dann ohne Rekursion, direkt aufgelöst werden.

Beispiel 31

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{2II-3I} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{5I-II} \left(\begin{array}{cc|c} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[\frac{1}{5}]{\frac{1}{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} \end{array} \right)$$

Die Lösung kann nun direkt abgelesen werden und lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \frac{1}{5}$$

Satz 2.12. *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und E die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gibt es ein $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit*

$$A \cdot A^{-1} = E \quad \text{und} \quad A^{-1} \cdot A = E.$$

Definition 2.13 (inverse Matrix). *Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix und E die Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$. Dann heißt $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $A \cdot A^{-1} = E$ inverse Matrix von A .*

Berechnung über Eliminationsverfahren: Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ und gesucht die Matrix $B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $A \cdot B = E$.

Erweiterte Matrix für alle n Systeme in Diagonalform bringen:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & 1 \end{array} \right)$$

Wir überzeugen uns von Satz 2.12, indem wir die Situation für eine 2×2 -Matrix betrachten (siehe Beispiel 32). Die Verallgemeinerung auf $n \times n$ -Matrizen ist dann analog.

Beispiel 32 Inverse berechnen

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right) &\xrightarrow{6(\text{II}/3-1/2)} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow{5\text{I-II}} \left(\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 5 & -3 & 2 \end{array} \right) \\ &\xrightarrow[\text{II}/5]{\text{I}/10} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0.8 & -0.2 \\ 0 & 1 & -0.6 & 0.4 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Dann ist $A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$



Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix, so kann man das LGS $Ax = y$ auch mit Hilfe der Inversen A^{-1} berechnen:

$$Ax = y \quad \Leftrightarrow \quad x = A^{-1}y$$

Beispiel 33 dünn besetzte Matrizen

Die Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist gegeben durch

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Fällt Ihnen was auf? Wenn nicht schauen Sie sich zusätzlich das nächste Beispiel an. Da wird es deutlicher.

Beispiel 34 große, dünn besetzte Matrizen

Die Tridigonalmatrix $A \in \mathbb{R}^{10 \times 10}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

hat $3 \cdot 8 + 2 = 26$ Nicht-Nulleinträge. Während ihre Inverse

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 14 & 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 2 \\ 6 & 6 & 12 & 18 & 15 & 12 & 9 & 6 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 10 & 15 & 20 & 16 & 12 & 8 & 4 & 4 \\ 4 & 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 15 & 10 & 5 & 5 \\ 3 & 3 & 6 & 9 & 12 & 15 & 18 & 12 & 6 & 6 \\ 2 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

mit $8 \cdot 10 + 2 = 82$ Einträgen "strotzt". Wenn Sie sich einmal Matrizen aus einer Finite-Elemente Simulation vorstellen, die aus $\mathbb{R}^{10000 \times 10000}$, sind dann sprechen wir von ungefähr 30'000, bzw. $3N - 4$ oder ungefähr 1'000'000, bzw. $N^2 - 2N + 2$ Matzeinträgen, mit denen ja dann auch was gerechnet wird..... Das ist zumindest bei FEM-Rechnungen der Grund, weshalb man zur Lösung von linearen Gleichungssystem in der Regel nicht die inverse Matrix verwendet.

Für reguläre Matrizen A und B gilt

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1},$$

denn

$$\begin{aligned} & (A \cdot B)^{-1}(A \cdot B) = E \\ \Leftrightarrow & (A \cdot B)^{-1} A = B^{-1} \\ \Leftrightarrow & (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} A^{-1} \quad \checkmark \end{aligned}$$

Definition 2.14 (orthogonale Matrix). *Eine Matrix heißt Orthogonalmatrix oder auch orthogonale Matrix, wenn sowohl ihre Spalten- als auch ihre Zeilenvektoren orthonormal (siehe Definition 1.13) sind.*

Beispiel 35 Die Einheitsmatrix ist eine Orthogonalmatrix.

Beispiel 36

$$P = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

ist Orthogonalmatrix.

Satz 2.15. Seien P und Q Orthogonalmatrizen. Dann gilt:

1. $P^T = P^{-1}$
2. $\|Px\|_2 = \|x\|_2$ und $\langle Px, Py \rangle = \langle x, y \rangle$.
3. $P \cdot Q$ ist orthogonal: $(P \cdot Q)^T = Q^T \cdot P^T = Q^{-1} \cdot P^{-1} = (P \cdot Q)^{-1}$.

2.4 Die Determinante einer Matrix

Die Determinante einer 2×2 -Matrix ist gerade das Kreuzprodukt der beiden Spaltenvektoren

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{1*} \times a_{2*} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

und beschreibt damit \pm den Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Spaltenvektoren beschrieben wird.

Beispiel 37

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 - 3 \cdot 1 = 13$$

Wenn wir uns einmal auf das Gedankenexperiment einlassen wollen, was in einer Raumdimension weiter also in 3d das Analogon wäre, dann würde das bedeuten, dass man etwas sucht, womit man das Volumen eines Spats berechnen kann. Dazu dient zunächst das sogenannte

Definition 2.16 (Spatprodukt). Seien $u, v, w \in \mathbb{R}^3$, dann heißt die Zahl, gegeben durch

$$\langle u, v, w \rangle := \langle u, v \times w \rangle$$

Spatprodukt der Vektoren u, v und w .

2 Lösen von linearen Gleichungssystemen

Das Spatprodukt beschreibt \pm das Volumen des Spats, das durch u, v und w aufgespannt wird. Nehmen wir einmal an, dass es sich bei den drei Vektoren um die Spalten einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ handelt:

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{array} \right) \times \left(\begin{array}{c} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{array} \right) \right\rangle \\ = \left\langle \left(\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32} \\ a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} \\ a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \end{array} \right) \right\rangle \\ = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel 38 Entwicklung nach der zweiten Spalte

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= -2 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -2(3 \cdot 4 - 0 \cdot 0) - 1(1 \cdot 4 - 0 \cdot 3) - 1(1 \cdot 0 - 3 \cdot 3) = -24 - 4 + 9 = -19 \end{aligned}$$

Entwicklung nach der dritten Zeile

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \\ &= -1(1 \cdot 0 - 3 \cdot 3) + 4(1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) = 9 - 28 = -19 \end{aligned}$$

Alternative Berechnungsformel für 3×3 -Matrizen ist die sogenannte *Regel von Sarrus* oder auch "*Jägerzaunregel*" genannt: Wir erweitern die Matrix A um die erste und zweite Spalte:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\det A = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{31} a_{22} a_{13} - a_{32} a_{23} a_{11} - a_{33} a_{21} a_{12}$$

Wir wenden das mal auf unser Beispiel an:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & | & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & | & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ = 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 0 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \\ = -4 + 0 + 9 + 3 - 0 - 24 = -19$$

Definition 2.17 (Streichmatrix). $A_{\{ij\}} \in \mathbb{K}^{(n-1) \times (n-1)}$ sei die Matrix, die entsteht, wenn man in A die i -te Zeile und j -te Spalte wegläßt. Wir nennen diese Matrix Streichmatrix zu A .

Beispiel 39

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{\{32\}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Entwicklung der Determinante von A nach der i -ten Zeile:

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{\{ij\}}$$

Entwicklung der Determinante von A nach der j -ten Spalte:

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{\{ij\}}$$

Folgerung 2.18. Ist A eine obere (untere) Dreiecksmatrix, so gilt

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}.$$

Man beachte, dass eine Diagonalmatrix sowohl eine obere als auch eine untere Dreiecksmatrix ist. Insbesondere gilt

$$\det E = 1$$

Beispiel 40

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33}$$

Satz 2.19 (Eigenschaften der Determinante). *Für die Determinante einer Matrix gilt:*

1. *Ist A' aus A durch Vertauschen zweier Zeilen entstanden, so gilt*

$$\det(A') = -\det(A).$$

2. *Ist A' aus A durch Multiplikation einer Zeile von A mit $\kappa \in \mathbb{K}$ entstanden, so gilt*

$$\det(A') = \kappa \det(A).$$

Inbesondere gilt dann auch

$$\det(\kappa A) = \kappa^n \det(A).$$

3. *Ist A' durch Addition einer Zeile mit dem Vielfachen einer anderen Zeile entstanden so gilt*

$$\det(A') = \det(A).$$

- 4.

$$\det(A^T) = \det(A)$$

- 5.

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

- 6.

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$$

Folgerung 2.20.

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Die Tatsache, dass $\det A^T = \det A$ gilt, erlaubt es uns, alle Aussagen, Matrixzeilen betreffend, auch über Matrixspalten zu treffen.

Mit Hilfe der Determinante lassen sich inverse Matrizen berechnen, sofern es eine gibt, versteht sich.

2.5 Lösen eines LGS mit der Cramerschen Regel

Definition 2.21 (komplementäre Matrix). *Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. $\tilde{A} \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit Koeffizienten*

$$\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j} \det A_{\{ji\}}$$

heißt komplementäre Matrix zu A .

komplementäre (3×3) -Matrix:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} + \det A_{\{11\}} & - \det A_{\{21\}} & + \det A_{\{31\}} \\ - \det A_{\{12\}} & + \det A_{\{22\}} & - \det A_{\{32\}} \\ + \det A_{\{13\}} & - \det A_{\{23\}} & + \det A_{\{33\}} \end{pmatrix}$$

Beispiel 41

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

⇒

$$\begin{array}{lll} \det A_{\{11\}} = 4 & \det A_{\{12\}} = -1 & \det A_{\{13\}} = -2 \\ \det A_{\{21\}} = 2 & \det A_{\{22\}} = 4 & \det A_{\{23\}} = -1 \\ \det A_{\{31\}} = 1 & \det A_{\{32\}} = 2 & \det A_{\{33\}} = 4 \end{array}$$

⇒

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Satz 2.22. Ist \tilde{A} die zu A komplementäre Matrix, so gilt

$$A \tilde{A} = \det A E.$$

Ist A regulär, so ist $\det A \neq 0$ und es folgt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A}.$$

Beispiel 42 Fortsetzung Beispiel 41

$$\det A = 9 \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A} \tilde{A} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Test:

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = E_3$$

Das invertieren von Matrizen können wir genauso gut mit Matrizen aus $\mathbb{C}^{n \times n}$ bewerkstelligen. Hierzu ein Beispiel:

Beispiel 43

Für die Matrix $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ berechnet sich die Determinante genauso wie für Matrizen mit rein reelwertigen Komponenten:

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ 4 & 1+3i \end{pmatrix}$$

⇒

$$\det A = (2+i)(1+3i) + 4i = -1 + 11i$$

Die komplementäre Matrix lautet

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1+3i & i \\ -4 & 2+i \end{pmatrix}$$

und daraus ergibt sich nun die inverse Matrix

$$A^{-1} = \frac{1}{-1+11i} \begin{pmatrix} 1+3i & i \\ -4 & 2+i \end{pmatrix}$$

komponentenweise in kartesische Form gebracht sieht das hübsch so aus

$$= \begin{pmatrix} 32-14i & 11-i \\ 4+44i & 9-23i \end{pmatrix} \frac{1}{122}$$

und man kann es auch so schreiben

$$= \frac{1}{122} \begin{pmatrix} 32 & 11 \\ 4 & 9 \end{pmatrix} - \frac{i}{122} \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ -44 & 23 \end{pmatrix}$$

Diese Variante der Berechnung einer inversen Matrix verwenden wir gewinnbringend zur Lösung von LGS und erhalten umunwunden eine elegante Lösungsformel, nämlich die

Cramersche Regel zur Lösung von LGS mit regulärer Matrix A : sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ regulär und

$$(A_{iy})_{kj} := \begin{cases} A_{kj} & \text{für } i \neq j \\ y_k & \text{für } i = j \end{cases}.$$

Dann gilt

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} Ax &= y \\ x_i &= \frac{\det A_{iy}}{\det A}, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

A_{iy} beschreibt die Matrix, deren i -te Spalte durch den Vektor y ersetzt wurde:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & y_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{j,i-1} & y_j & a_{j,i+1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & y_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beweis Cramersche Regel:

$$\begin{aligned} Ax &= y \\ \Leftrightarrow x &= A^{-1}y \\ \Leftrightarrow x_i &= (A^{-1}y)_i = \frac{1}{\det A} \sum_k \tilde{A}_{ik} y_k \\ &= \frac{1}{\det A} \sum_k y_k (-1)^{i+k} \det A_{\{ki\}} \quad \text{Det. entw. nach } i\text{-ter Spalte von } A_{iy} \\ &= \frac{1}{\det A} \det A_{iy} \end{aligned}$$

□

Beispiel 44

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 42$$

$$\det A_{\{11\}} = -4$$

$$\det A_{\{12\}} = -8$$

$$\det A_{\{13\}} = 10$$

$$\det A_{\{21\}} = -6$$

$$\det A_{\{22\}} = -12$$

$$\det A_{\{23\}} = -6$$

$$\det A_{\{31\}} = 7$$

$$\det A_{\{32\}} = -7$$

$$\det A_{\{33\}} = -7$$

⇒

$$A^{-1} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 8 & -12 & 7 \\ 10 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

⇒

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} -4 & 6 & 7 \\ 8 & -12 & 7 \\ 10 & 6 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Vektorräume (n d)

3

Wir behandeln:

- Was ist ein Vektorraum?
- Mehr als Pfeilchen und Punkte
- Basen und Erzeugendensysteme
- Messen in Vektorräumen
- Vektorräumen aufspannen und Vektoren darstellen

3.1 Der Vektorraum als solcher

Definition 3.1 (Vektorraum (VR)). Sei $V \neq \emptyset$ eine nicht leere Menge, $a, b \in V$, \mathbb{K} ein Körper und es gelte

$$a + b \in V \quad \wedge \quad \lambda a \in V, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

$(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$ heißt Vektorraum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind

Addition:

(V1) $a + b = b + a$ (Kommutativgesetz)

(V2) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (Assoziativgesetz)

(V3) $\exists 0 \in V : a + 0 = a$ (neutrales Element bezüglich der Addition)

(V4) $\forall a \in V \exists! -a \in V : (-a) + a = 0$ (additives Inverses)

Multiplikation:

(V5) $1 \cdot a = a$ (neutrales Element bezüglich der Multiplikation)

(V6) $\lambda(\mu a) = (\lambda \mu)a$ (Assoziativgesetz)

Addition und Multiplikation:

(V7) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ (Distributivgesetz)

(V8) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$ (Distributivgesetz)

Elemente eines Vektorraums heißen Vektoren. Wir schreiben kurz V statt $(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$. Das neutrale Element bezüglich der Addition heißt Nullvektor.

Beispiel 45 Vektorräume

- (a) $V = \mathbb{R}^n$ ist ein VR.
 (b) $V = \mathbb{P}_3$, die Menge aller Polynome vom Grad ≤ 3 der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$$

ist ein VR.

- (c) Die Menge der $m \times n$ -Matrizen über dem Körper \mathbb{K} ist ein Vektorraum. Matrizen sind also Vektoren des Vektorraums $V = \mathbb{K}^{m \times n}$.

Definition 3.2 (Unter(vektor)raum, (UVR)). Sei V ein Vektorraum. Eine Teilmenge $U \subset V$ heißt Untervektorraum oder kurz Unterraum, falls U selbst wieder ein Vektorraum ist.

Es genügt zu prüfen, dass $\forall a, b \in U : a + b \in U$ und $\alpha a \in U$ gilt. Alle anderen Vektorraumeigenschaften übertragen sich automatisch von V auf U .

Beispiel 46 Untervektorräume Es sei $V = \mathbb{R}^n$

- (a) $U = \{0\}$
 (b) $U = V$
 (c) Für $v \in V \setminus \{0\}$ ist $U = \{x \in V \mid x = tv, t \in \mathbb{R}\}$ ein UVR.
 (d) $U = \{x \in V \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0\} \subset V$ ist ein UVR.
 (e) $U = \{x \in V \mid 2x_1 + 3x_2 + x_3 \neq 0\} \subset V$ ist kein UVR.
 (f) Lösungen von homogenen LGS sind immer UVRe.
 (g) Lösungen von inhomogenen LGS sind nie UVRe, denn es fehlt die 0!
 (h) $\text{Span}(x^2, 1, x^4) \subset \mathbb{P}_4$ ist ein UVR.

Beispiel 47 noch mal Untervektorräume Alle Geraden und Ebenen, die durch den Ursprung verlaufen, sind Vektorräume. Sie sind Teilmengen des \mathbb{R}^3 , womit sich alle Vektorraumaxiome (V1)-(V8) übertragen. Es muss dann nur noch die Abgeschlossenheit überprüft werden: Eine Ebene etwa, die nicht durch den Ursprung verläuft ist kein Vektorraum.

$$E : \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt für $w, v \in E$

$$w + v = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

und

$$\alpha w = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin E$$

3.2 Basis und Dimension

Definition 3.3 (lineare Abhängigkeit). Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen linear abhängig falls es Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ gibt, die nicht alle gleich Null sind mit

$$\sum_{l=1}^n \lambda_l v_l = 0.$$

Die Vektoren heißen linear unabhängig wenn sie nicht linear abhängig sind.

Zur besseren Lesbarkeit schreiben wir Skalare meistens mit griechischen Buchstaben; das aber nicht zwingend.



Da $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0$ für $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ immer erfüllt ist, sucht man bei der Frage nach linear Abhängigkeit nach einem $\lambda_i \neq 0$.

Beispiel 48 linear un-/abhängig

(a) Gegeben seien die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Es sind

- $\{a, b\}$ linear abhängig (la)
- $\{a, c\}$ linear unabhängig (lu)
- $\{a, c, d\}$ paarweise (pw) linear unabhängig zusammen aber linear abhängig

(b) Es sei $V = \mathbb{P}_3$ mit den linear unabhängigen Vektoren

$$p_1(x) = x^2 + x + 1, p_2(x) = x - 1 \quad \text{und} \quad p_3(x) = x^3 - x^2 + 2.$$

Warum sind die jetzt lu? Darum:

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$\lambda_3 x^3 + (\lambda_1 - \lambda_3) x^2 + (\lambda_1 + \lambda_2) x + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2 \lambda_3) = 0$$

\Leftrightarrow

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0$$

(c) Die Vektoren

$$p_1(x) = 2x + 1, p_2(x) = x + x^2, p_3(x) = x^2 + 3x + 1$$

sind pw lu aber zusammen la.

Satz 3.4. *Eine Menge von Vektoren ist genau dann linear abhängig, wenn sich einer von ihnen als Linearkombination der jeweils anderen darstellen lässt.*

Definition 3.5 (Erzeugendensystem & lineare Hülle). *Seien $v_1, \dots, v_m \in V$. Dann bezeichnet die Menge*

$$U = \text{Span}(v_1, \dots, v_m) \subseteq V$$

die Menge aller Linearkombinationen aus v_1 bis v_m . Wir nennen U Spann oder auch lineare Hülle. Die Vektoren v_1, \dots, v_m heißen Erzeugendensystem von U .

Definition 3.6 (Basis & Dimension). *Sei $U = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$. Ist das Erzeugendensystem v_1, \dots, v_n minimal, das heißt es sind alle v_i linear unabhängig, so nennen wir v_1, \dots, v_n eine Basis von U . Die Anzahl der Basisvektoren bestimmt die Dimension des Raumes U . Wir schreiben*

$$\text{Dim}(U) = n$$

Die Basisdarstellung eines Vektorraums ist nicht eindeutig.

Beispiel 49 Basen

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und

$$\mathbb{R}^2 = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Beispiel 50 lu/la und Basen

(a) Es sei $V = \mathbb{R}^2$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Frage: Gilt

$$V = \text{Span}(v_1, v_2, v_3),$$

d.h. kann jedes Element $w \in \mathbb{R}^2$ aus Linearkombinationen der v_i dargestellt werden?

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$$

Wir lösen das LGS

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & w_1 \\ 1 & 2 & 0 & w_2 \end{array} \xrightarrow{\text{II-I}} \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 1 & 1 & -1 & w_1 \\ 0 & 1 & 1 & w_2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \exists_{\infty} \lambda \in \mathbb{R}^3 : w = \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

In anderen Worten "es gibt unendlich viele $\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix}$, die linear kombiniert mit den Vektoren v_1, v_2, v_3 , den Vektor $w \in V$ darstellen.

(b) zu Beispiel 48, (b)

$$\mathbb{P}_3 \neq \text{Span}(p_1, p_2, p_3)$$

Wir wollen uns davon überzeugen, dass die p_i nicht genügen, um jedes kubische Polynom $q \in \mathbb{P}_3$ aus ihnen zu erzeugen:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i(x) = q(x) \\ \Leftrightarrow & \lambda_1(x^2 + x + 1) + \lambda_2(x - 1) + \lambda_3(x^3 - x^2 + 2) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \\ \Leftrightarrow & \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 - a_0)}_{=0} + \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 - a_1)}_{=0} x \\ & + \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_3 - a_2)}_{=0} x^2 + \underbrace{(\lambda_3 - a_3)}_{=0} x^3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\
 \hline
 1 & -1 & 2 & a_0 \\
 1 & 1 & 0 & a_1 \\
 1 & 0 & -1 & a_2 \\
 0 & 0 & 1 & a_3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \xrightarrow{\text{II-III}} \\
 \xrightarrow{\text{III-I-II}}
 \end{array}
 \begin{array}{ccc|c}
 \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\
 \hline
 1 & -1 & 2 & a_0 \\
 0 & 1 & 1 & a_1 - a_2 \\
 0 & 0 & -4 & a_2 - a_0 - a_1 \\
 0 & 0 & 1 & a_3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c}
 \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\
 \hline
 1 & -1 & 2 & a_0 \\
 0 & 1 & 1 & a_1 - a_2 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4}(a_2 - a_0 - a_1) + a_3 \\
 0 & 0 & 1 & a_3
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \\
 \xrightarrow{\text{III/4+IV}}
 \end{array}$$

Dieses LGS hat nur dann eine Lösung, wenn

$$a_0 = 4a_3 + a_2 - a_1$$

erfüllt ist, also können nur kubische Polynome der Gestalt

$$q(x) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + 4a_3 + a_2 - a_1$$

durch die p_i dargestellt werden. Es fallen zum Beispiel alle konstanten Polynome

$$q(x) = a_0$$

raus! Demnach gilt

$$\text{Span}(p_1, p_2, p_3) \subsetneq \mathbb{P}_3$$

(c) Sei $V = \mathbb{P}_2$. Die Vektoren

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = x + 1 \quad \text{und} \quad p_2(x) = (x + 1)^2$$

bilden eine Basis von V .

(i) Die p_i sind lu.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i(x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \lambda_1 + \lambda_2(x+1) + \lambda_3(x+1)^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_{=0} + \underbrace{(\lambda_2 + 2\lambda_3)}_{=0} x + \underbrace{\lambda_3}_{=0} x^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0 \tag{1} \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

Die Matrix in Gleichung (1) ist offensichtlich regulär und damit hat das LGS eine eindeutige Lösung. Es kommt nur $\lambda = 0$ in Frage, woraus wir schließen, dass die p_i linear unabhängig sind.

- (ii) Die p_i können linear kombiniert jedes $q \in V$ darstellen. Hierzu machen wir eine ähnliche Rechnung wie in (ii), nur dass wir nicht auf ein homogenes sondern inhomogenes LGS stoßen:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^3 \lambda_i p_i(x) = q(x) \\ \Leftrightarrow & \underbrace{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)}_{=a_0} + \underbrace{(\lambda_2 + 2\lambda_3)}_{=a_1} x + \underbrace{\lambda_3}_{=a_2} x^2 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

Das LGS in (2) ist eindeutig lösbar und somit erhalten wir für jedes beliebige $q \in \mathbb{P}_2$ eine Darstellung als Linearkombination der p_i . Es gilt also insgesamt

$$\text{Span}(p_1, p_2, p_3) = \mathbb{P}_2$$

und

$$\text{Dim}(\mathbb{P}_2) = 3.$$

3.3 Darstellung Vektoren

Satz 3.7. Sei $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis und $a \in V$. Dann gibt es genau n Skalare λ_i , $i = 1, \dots, n$ mit

$$a = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k.$$

Das bedeutet, dass es zu jeder Basis genau eine Darstellung des Vektors gibt.

Beweis Satz 3.7:

$$\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} v_1^1 \\ \vdots \\ v_1^n \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} v_n^1 \\ \vdots \\ v_n^n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1^1 & \dots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \dots & v_n^n \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist $\det(A) \neq 0$, da die Spalten in der Matrix Basisvektoren und somit linear unabhängig sind. Demzufolge ist das LGS eindeutig lösbar. Bei gegebener Basis gibt es also für jedes $a \in V$ eindeutig bestimmte Koordinaten λ , was ja genau die Behauptung war.

□

Definition 3.8 (Koordinaten & Koordinatenvektor). Sei $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V und $a \in V$ mit der eindeutigen Darstellung

$$a = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k .$$

Die eindeutigen Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heißen Koordinaten des Vektors a bezüglich der Basis B und

$$a_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

heißt Koordinatenvektor von a bezüglich B .

Definition 3.9 (Kronecker Symbol).

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Kronecker Symbol.

Definition 3.10 (kartesisches Koordinatensystem). Ein kartesisches Koordinatensystem wird erzeugt durch die Einheitsvektoren e_1, \dots, e_n mit $e_i = (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$. Jeder Vektor a eines kartesischen Koordinatensystems wird dargestellt als Linearkombination der Einheitsvektoren e_i und den zugehörigen Koordinaten a_i ($i = 1, \dots, n$):

$$a = \sum_{i=1}^n a_i e_i$$

Der Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

beschreibt dann den zu a gehörenden Koordinatenvektor.

Definition 3.11 (affines Koordinatensystem). Ein affines Koordinatensystem ist eine Verallgemeinerung des kartesischen Koordinatensystems auf ein System von linear unabhängigen Basisvektoren b_1, \dots, b_n . Jeder Vektor a kann dargestellt werden als

$$a = \sum_{i=1}^n \beta_i b_i$$

mit den affinen Koordinaten β_i , ($i = 1, \dots, n$). Der Vektor

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

beschreibt dann den zu a gehörenden Koordinatenvektor.

Affine Koordinatensysteme und somit auch kartesische Koordinatensysteme sind geradlinig. Weitere Koordinatensysteme, die nicht geradlinig sind sind zum Beispiel Polar- und Zylinderkoordinaten, die wir im zweiten Semester noch behandeln werden. Ein sehr anschauliches Beispiel für nicht geradlinige Koordinatensysteme kennen wir über Kartenabbildungen des Globus.

3.4 Vektoren messen

Definition 3.12 (Skalarprodukt). Eine Abbildung $s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$(S1) \quad s(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, b) = \alpha_1 s(a_1, b) + \alpha_2 s(a_2, b) \quad (\text{Bilinearität})$$

$$(S2) \quad s(a, b) = s(b, a) \quad (\text{Kommutativität})$$

$$(S3) \quad s(a, a) \geq 0 \quad (\text{positiv definit})$$

$$(S3) \quad s(a, a) = 0 \Rightarrow a = 0$$

heißt Skalarprodukt. $(V, \mathbb{K}, +, \cdot, s)$ kurz (V, s) heißt Prähilbertraum. Prähilbertraum ist ein Überbegriff. Wählt man $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ speziell so heißt $(V, \mathbb{C}, +, \cdot, s)$ unitärer VR und $(V, \mathbb{R}, +, \cdot, s)$ Euklidischer VR. Im speziellen Fall, dass $V = \mathbb{R}^2$ ist so nennen wir den Vektorraum Euklidische Ebene.

Folgerung 3.13. $(S1)$ und $(S2)$ liefern

$$s(a, \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) = \beta_1 s(a, b_1) + \beta_2 s(a, b_2).$$

Aus $(S1)$ folgt

$$a = 0 \Rightarrow s(a, a) = 0.$$

Beispiel 51 Standardskalarprodukt Im \mathbb{R}^n heißt das Skalarprodukt

$$s(a, b) = \langle a, b \rangle := \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

Standardskalarprodukt.

Definition 3.14 (Norm). Eine Abbildung $\|\cdot\|_V : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Norm, wenn für beliebige $a, b \in V$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt:

(N1) $\|a\|_V \geq 0 \wedge \|a\|_V = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(N2) $\|\lambda a\|_V = |\lambda| \|a\|_V$

(N3) $\|a + b\|_V \leq \|a\|_V + \|b\|_V$ (Dreieckungleichung)

$(V, \mathbb{K}, +, \cdot, \|\cdot\|_V)$ oder kurz $(V, \|\cdot\|_V)$ heißt normierter Raum

Wir sagen ein Vektor a habe die Länge $\|a\|_V$ (bezüglich der Norm $\|\cdot\|_V$).

Beispiel 52

(a)

$$\|a\|_2 = \sqrt{\sum_i a_i^2}$$

(b)

$$\|a\|_p = \sqrt[p]{\sum_i a_i^p}$$

(c)

$$\|a\|_\infty = \max_i |a_i|$$

Satz 3.15 (Euklidische Norm). Eine durch ein Skalarprodukt induzierte Abbildung gemäß

$$\|a\|_s := \sqrt{s(a, a)}$$

stellt eine Norm dar und heißt Euklidische Norm.

Beispiel 53 Betrag als Euklidische Norm Die Euklidische Norm $\|a\| := \sqrt{\langle a, a \rangle}$ beschreibt den Betrag $|a|$ des Vektors a , das heißt die Entfernung des Punktes a vom Ursprung.

Um zu zeigen, dass eine durch ein Skalarprodukt induzierte Abbildung gemäß $\|\cdot\|_s = \sqrt{s(\cdot, \cdot)}$ tatsächlich eine Norm darstellt ist folgender Satz hilfreich.

Satz 3.16 (Cauchy–Schwarzsche Ungleichung).

$$|s(x, y)| \leq \|x\|_s \cdot \|y\|_s \tag{3}$$

Beweis 3.16:

Es sei (V, s) ein Prähilbertraum mit induzierter Norm $\|\cdot\|_V$. Dann gilt $\forall x, y \in V \setminus \{0\}$ und $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|x - \lambda y\|_V^2 = s(x - \lambda y, x - \lambda y) \\ &= s(x, x) - 2\lambda s(x, y) + \lambda^2 s(y, y) \end{aligned}$$

Wir wählen $\lambda = \frac{s(x, y)}{s(y, y)}$, λ ist ja beliebig, und dann erhalten wir

$$\begin{aligned} &= s(x, x) - 2 \frac{s(x, y)}{s(y, y)} s(x, y) + \frac{s(x, y)^2}{s(y, y)^2} s(y, y) \\ &= s(x, x) - 2 \frac{s(x, y)^2}{s(y, y)} + \frac{s(x, y)^2}{s(y, y)} \\ &= s(x, x) - \frac{s(x, y)^2}{s(y, y)} \end{aligned}$$

Da $s(y, y) > 0$ ist dieser Ausdruck äquivalent zu

$$s(x, y)^2 \leq \|x\|_V^2 \|y\|_V^2$$

□

Beweis 3.15:

Es sei (V, s) ein Prähilbertraum und die Abbildung $\|\cdot\|_s : V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $\|\cdot\|_s = \sqrt{s(\cdot, \cdot)}$. Zu zeigen ist, dass für die Abbildung $\|\cdot\|_s$ die Normaxiome (N1) bis (N3) aus Definition 3.14 erfüllt sind.

$$(N1) \quad \|\alpha v\|_s = |\alpha| \|v\|_s:$$

$$\|\alpha v\|_s = \sqrt{s(\alpha v, \alpha v)} = \sqrt{\alpha^2 s(v, v)} = |\alpha| \sqrt{s(v, v)} = |\alpha| \|v\|_s$$

(N2) $\|v\|_s \geq 0$ und $\|v\|_s = 0 \Leftrightarrow v = 0$ folgt direkt aus der positiv Definitheit des Skalarprodukts (siehe (S3) und (S4) in Def. 3.12).

$$(N3) \quad \|v + w\|_s \leq \|v\|_s + \|w\|_s:$$

$$\|v + w\|_s^2 = s(v + w, v + w) \leq s(v, v) + 2|s(v, w)| + s(w, w)$$

$$\stackrel{\text{Satz 3.16}}{\leq} \|v\|_s^2 + 2\|v\|_s\|w\|_s + \|w\|_s^2 = (\|v\|_s + \|w\|_s)^2$$

□



Da jedes Skalarprodukt eine Euklidische Norm induziert, ist jeder Prähilbertraum automatisch auch ein normierter Raum. Man kann aber nicht zu jeder Norm ein "passendes" Skalarprodukt finden, so dass nicht jeder normierte Raum auch ein Prähilbertraum ist.

Im Kapitel 1.3 haben wir in Definition 1.12 den Winkel über das Standardskalarprodukt und die Euklidische Norm, nämlich den Betrag definiert. Im allgemeinen Kontext erweitern wir den Winkelbegriff auf beliebige Skalarprodukte und den zugehörigen induzierten Normen gemäß

Definition 3.17 (Winkel). *Der Winkel φ zwischen zwei Vektoren a und b im Prähilbertraum (V, s) ist definiert durch*

$$\cos \varphi = \frac{s(a, b)}{\|a\|_s \|b\|_s}.$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_s$ die durch das Skalarprodukt $s(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ induzierte Euklidische Norm.

Aus diesem verallgemeinerten Winkelbegriff ergeben sich natürlicherweise alle vom Winkel abhängigen Begriffe wie Orthogonalität, Normiertheit, etc in einer verallgemeinerten Notation. Alles was mit Länge und Winkel zu tun hat hängt nun von der Wahl des Skalarprodukts ab.

Definition 3.18 (orthogonale und parallele Vektoren). *Zwei Vektoren $a, b \in V$ heißen orthogonal oder senkrecht (bezüglich des Skalarprodukts $s(\cdot, \cdot)$) wenn*

$$s(a, b) = 0$$

gilt. Sie heißen parallel wenn

$$|s(a, b)| = \|a\|_s \|b\|_s$$

gilt.

Beispiel 54 Bezüglich dem Skalarprodukt (prüfen Sie das!)

$$s(p, g) = \int_0^{\pi} p(x)g(x) dx$$

sind die Vektoren

$$p(x) = \cos x \quad \text{und} \quad g(x) = \sin x$$

orthogonal, denn es gilt

$$s(p, g) = \int_0^{\pi} \cos x \sin x dx = 0.$$

Definition 3.19 (Normalvektor). Sei $a \in V$. Dann heißt $a^\perp \in V$ Normalvektor zu a , wenn

$$s(a, a^\perp) = 0$$

erfüllt ist.

Es ist also $\sin x^\perp = \cos x$. Wichtig ist, dass die Orthogonalität sich auf das speziell gewählte Skalarprodukt, hier aus Beispiel 54, bezieht und bei der Wahl des Skalarprodukts über ein Integral auch der Integrationsbereich relevant ist, denn es gilt etwa

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx \neq 0 !!!$$

Bezüglich dieses Skalarprodukts, mit anderen Integrationsgrenzen, sind die Vektoren nicht orthogonal.

Definition 3.20 (normierter Vektor). $a \in (V, \|\cdot\|_V)$ mit

$$\|a\|_V = 1$$

heißt normiert bezüglich $\|\cdot\|_V$ oder kurz normiert.

Jeder Vektor $a \in (V, \|\cdot\|_V)$ kann gemäß



$$\tilde{a} = \frac{a}{\|a\|_V} \quad \Rightarrow \quad \|\tilde{a}\|_V = 1$$

normiert werden.

Beispiel 55 Es sei $V = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Raum und

$$a = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\|a\|_\infty = 4 \quad \text{und} \quad \tilde{a} = \frac{a}{\|a\|_\infty} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

\tilde{a} ist bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Vektor, nicht aber bezüglich $\|\cdot\|_2$, denn $\|\tilde{a}\|_2 = \sqrt{5} \neq 1$.

Definition 3.21 (Orthogonal- und Orthonormalbasis). Sei (V, s) ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt $s(\cdot, \cdot)$ und Euklidischer Norm $\|\cdot\|_s := \sqrt{s(\cdot, \cdot)}$. Eine Basis b_1, \dots, b_n von V heißt Orthogonalbasis, falls gilt:

$$\forall b_i, b_j \quad i \neq j : s(b_i, b_j) = 0$$

Die Basis heißt Orthonormalbasis falls gilt:

$$\forall b_i, b_j \quad i \neq j : s(b_i, b_j) = \delta_{ij}$$

Insbesondere gilt für Orthonormalbasen, dass

$$\|b_i\|_s = 1 \quad 1 \leq i \leq n.$$

Definition 3.22 (orthogonales Komplement). Sei (V, s) ein Prähilbertraum und $U \subset V$ ein UVR von V . Das orthogonale Komplement von U in V ist eine Teilmenge $W \subset V$ mit

$$w \perp U, \forall w \in W.$$

Ein Vektor w ist orthogonal zum einem Vektorraum bedeutet, dass w zu jedem beliebigen Element in V orthogonal ist.



Die Basen eines UVR und die seines orthogonalen Komplements sind immer paarweise linear unabhängig.

Definition 3.23 (orthogonale Projektion). Sei V ein VR und U ein UVR von V . Eine Abbildung $P : V \rightarrow U$ heißt orthogonale Projektion auf U , falls

$$P(v) \in U \quad \text{und} \quad v - P(v) \perp U$$

für alle $v \in V$.

Dieser Satz ist nun in der Tat ein wenig abstrakt und wir wollen ihn direkt ein wenig entmystifizieren. Satz 3.24 zeigt uns zunächst wie so eine orthogonale Projektion $P(v)$ überhaupt aussieht, unter der Voraussetzung, dass der UVR eine Orthogonalbasis besitzt. Anschließend überzeugen wir uns, mit Hilfe des sogenannten Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in Satz 3.25 davon, dass für jeden VR, so auch für jeden UVR, stets eine Orthogonalbasis angegeben werden kann. Sonst nützt das ja nix.

Satz 3.24. Sei (V, s) ein Prähilbertraum und $U \subset V$ ein UVR mit Orthogonalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$. Dann gilt für alle $v \in V$

$$P(v) = \sum_{k=1}^n \frac{s(v, b_k)}{\|b_k\|_s^2} b_k.$$

Ist \mathcal{B} sogar eine Orthonormalbasis so verkürzt sich die Formel auf

$$P(v) = \sum_{k=1}^n s(v, b_k) b_k.$$

Beweis Satz 3.24:

Wir zeigen, dass für jedes $v \in V$

$$v - P(v) \perp b_j, \quad \forall b_j \in \mathcal{B}.$$

Für jedes beliebige $b_j \in \mathcal{B}$ gilt

$$\begin{aligned} s(v - P(v), b_j) &= s(v, b_j) - s(P(v), b_j) = s(v, b_j) - \sum_{k=1}^n \frac{s(v, b_k)}{\|b_k\|_s^2} \underbrace{s(b_k, b_j)}_{\delta_{kj} \|b_j\|_s^2} \\ &= s(v, b_j) - \frac{s(v, b_j)}{\|b_j\|_s^2} \|b_j\|_s^2 = 0 \end{aligned}$$

Damit ist auch klar, dass $s(v - P(v), w) = 0 \forall w \in U$, denn mit $w = \sum_{j=1}^n \beta_j b_j$ folgt

$$s(v - P(v), w) = s(v - P(v), \sum_{j=1}^n \beta_j b_j) = \sum_{j=1}^n \beta_j \underbrace{s(v - P(v), b_j)}_{=0} = 0$$

□

Beispiel 56 Sei $V = (\mathbb{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ und $U \subset V$ ein UVR mit

$$U = \text{Span}(a_1, a_2), \quad a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$\{a_1, a_2\}$ ist eine Orthogonalbasis (überzeugen Sie sich davon!) mit

$$\|a_1\| = \sqrt{5} \quad \text{und} \quad \|a_2\| = 3.$$

Es sei

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V.$$

Es ist $v \notin U$ (überzeugen Sie sich davon!) und wir erhalten als orthogonale Projektion

$$P(v) = \frac{\langle v, a_1 \rangle}{\|a_1\|^2} a_1 + \frac{\langle v, a_2 \rangle}{\|a_2\|^2} a_2 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{5}{9} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 59 \\ -7 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Es ist dann

$$v - P(v) = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 76 \\ -38 \\ 95 \end{pmatrix}.$$

überzeugen Sie sich davon, dass $P(v) \in U$ und $v - P(v) \in U^\perp$ gilt.

Sowohl im Beispiel 56 als auch im Satz 3.24 habe wir davon Gebrauch gemacht, dass eine Orthogonalbasis vorhanden ist. Was aber wenn die angegebene Basis gar nicht orthogonal ist? Ein einfacher Ausweg liefert uns folgender Satz, der besagt, dass man immer eine Orthogonal- bzw. Orthonormalbasis konstruieren kann.



Wir sprechen hier immer von endlichdimensionalen VRe! Es lässt sich alles auf VRe mit unendlich aber abzählbar vielen Basen erweitern nicht jedoch auf überabzählbar unendlichdimensionale VRe!

Satz 3.25 (Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren). Sei (V, s) ein Prähilbertraum mit Basis $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ mit

$$\text{Span}(b_1, \dots, b_n) = \text{Span}(a_1, \dots, a_n) .$$

Die Orthonormalbasis ist gegeben durch

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|_s} a_1$$

und für $k = 2, \dots, n$

$$b_k = \frac{1}{\|\tilde{b}_k\|_s} \tilde{b}_k \qquad \tilde{b}_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} s(a_k, b_i) b_i$$

Beweisen lässt sich der Satz elegant mit der Methode der Vollständigen Induktion. Wir lassen das und begnügen uns mit anschaulichen Beispielen.

Beispiel 57 Wir suchen die Orthonormalbasis zur Basis

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} .$$

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|} a_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = a_2 - \langle a_2, b_1 \rangle b_1 = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Überzeugen Sie sich davon, dass

$$\text{Span}(a_1, a_2) = \text{Span}(b_1, b_2)$$

oder Variationen davon gelten.

Beispiel 58 Sei $V = (C^\circ([0, 1]), (\cdot, \cdot)_{L^2})$ der Raum der quadratintegrierbaren, stetigen Funktionen gegeben mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2} = \int_0^1 f(x) g(x) dx.$$

Für den Unterraum, aufgespannt durch die *Monome* $x^k, k \in \mathbb{N}_0$, also mit der Basis

$$\mathcal{A} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{x^0, x^1, x^2, x^3, \dots\}$$

ist bezüglich dem angegebenen Skalarprodukt eine Orthonormalbasis $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \dots\}$ gesucht.

$$\begin{aligned} (a_0, a_0)_{L^2} &= \int_0^1 1 dx = 1 \\ \Rightarrow b_0 &= 1 \\ (a_1, b_0)_{L^2} &= \int_0^1 x \cdot 1 dx = \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \tilde{b}_1 &= a_1 - (a_1, b_0)_{L^2} b_0 = x - \frac{1}{2} \\ (\tilde{b}_1, \tilde{b}_1)_{L^2} &= \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{12} \\ \Rightarrow b_1 &= 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right) \\ \stackrel{\ddot{u}_A}{\Rightarrow} b_2 &= 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right) \end{aligned}$$

Wir erhalten also die entsprechende Orthonormalbasis

$$\mathcal{B} = \left\{ 1, 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right), 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right), \dots \right\}.$$

Definition 3.26 ((direkte) Summe von Unterräumen). Seien U_1, U_2 UVR von V . Dann ist die Summe von U_1 und U_2 erklärt durch

$$U_1 + U_2 = \{a + b \mid a \in U_1 \wedge b \in U_2\}.$$

Der Schnitt ist gegeben durch

$$U_1 \cap U_2 = \{a \mid a \in U_1 \wedge a \in U_2\}.$$

Ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ dann heißt die Summe von U_1 und U_2 direkte Summe und wir schreiben

$$U_1 \oplus U_2.$$



Wenn wir zwei Unterräume addieren so werfen wir alle beteiligten Basisvektoren in einen Topf und erhalten dann zunächst ein Erzeugendensystem. Ist das Erzeugendensystem wieder linear unabhängig so stellt es eine Basis des neuen Raums dar, die Dimensionen der beteiligten Unterräume addieren sich und die Summe ist eine direkte Summe.

Beispiel 59 direkte Summe

Es seien die Räume $U_1 = \text{Span}(e_1, e_2)$ und $U_2 = \text{Span}(e_3)$ gegeben. Dann ist

$$\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2.$$

Beachten Sie an dieser Stelle den Unterschied bei der mengentheoretischen "Zusammenführung" zweier Mengen durch Vereinigung. Es gilt hier

$$\mathbb{R}^3 \neq U_1 \cup U_2.$$

Es ist etwa der Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ mit

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

weder in U_1 noch in U_2 enthalten und somit auch nicht in $U_1 \cup U_2$. Wohl ist er aber in $U_1 \oplus U_2$ enthalten, da er sich als Linearkombination der durch die Vereinigung der Mengen der Basisvektoren darstellen lässt:

$$a = \underbrace{e_1 + 2e_2}_{\in U_1} + \underbrace{3e_3}_{\in U_2}.$$

Definition 3.27 (hermitesch). Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gegeben. Die komplex konjugierte Matrix \bar{A} erhalten wir, indem wir alle Einträge der Matrix komplex konjugieren. Die Transponierte und komplex konjugierte Matrix $A^* = \bar{A}^T$ heißt adjungierte Matrix. A heißt hermitesch, wenn sie gleich ihrer Adjungierten ist, also wenn

$$A = \bar{A}^T =: A^*$$

gilt.

Die Einträge einer komplex konjugierten Matrix ergeben sich als

$$(a_{ij})_{ij}^* = (\bar{a}_{ji})_{ij} .$$

Das Analogon im \mathbb{R} sind die symmetrischen Matrizen.

Beispiel 60 adjungierte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2+i & -i \\ 3 & 3i-4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2-i & 3 \\ i & -3i-4 \end{pmatrix}$$

Beispiel 61 hermitesche Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 3 \end{pmatrix} = A$$

Beispiel 62 Pauli Matrizen Die sogenannten Pauli-Matrizen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tauchen unter anderem in der Pauli-Gleichung zur quantenmechanischen Beschreibung von Teilchen mit Spin im Magnetfeld auf. Sie sind eine Basis eines Untervektorraums des 4-dimensionalen Vektorraums aller komplexen 2×2 -Matrizen im $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. Zusammen mit der nullten Pauli-Matrix $\sigma_0 = E_2$ erzeugen sie sogar den ganzen Vektorraum $\mathbb{C}^{2 \times 2}$. Der Vektorraum (V, \mathbb{R}, s) mit

$$V = \text{Span}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \text{ und } s(\sigma_i, \sigma_j) = \frac{1}{2} \text{Spur}(\sigma_i \sigma_j)$$

stellt einen unitären VR der 2×2 -Matrizen dar, die hermitesch und spurlos sind.

Sei $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mit $A = A^*$, also von der Form

$$A = \begin{pmatrix} a & c+ib \\ c-ib & -a \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Finde λ_i mit $\sum_{i=1}^3 \sigma_i \lambda_i = A$:

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \lambda_1 + \sigma_2 \lambda_2 + \sigma_3 \lambda_3 = A \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda_3 = \begin{pmatrix} a & c+ib \\ c-ib & -a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} \lambda_3 & \lambda_1 - i\lambda_2 \\ \lambda_1 + i\lambda_2 & -\lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c+ib \\ c-ib & -a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c+ib \\ c-ib \\ -a \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -b \\ a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Dieses λ ist dann auch - nebenbei bemerkt - der Koeffizientenvektor der Matrix A bezüglich der Pauli-Matrizen als Basis.

Lineare Abbildungen

4

Wir behandeln:

- Homomorphismen
- Kerne, Bilder und die Dimensionsformel

Definition 4.1 (lineare Abbildung). Eine Abbildung $\mathcal{A} : V \rightarrow W$ zwischen den beiden \mathbb{K} -Vektorräumen V und W heißt lineare Abbildung oder Homomorphismus, wenn für alle Vektoren $x, y \in V$ und alle Skalare $\kappa, \lambda \in \mathbb{K}$

$$\mathcal{A}(\kappa x + \lambda y) = \kappa \mathcal{A}(x) + \lambda \mathcal{A}(y)$$

gilt. Die Menge der Homomorphismen von V nach W wird mit $\text{Hom}(V, W)$ bezeichnet.

Eine lineare Abbildung ist eine Abbildung, die Vektoren aus V Vektoren aus W zuordnet. Dabei ist es egal, ob man zunächst eine Linearkombination von Vektoren aus V bildet und dann \mathcal{A} anwendet oder ob man die Linearkombination in W bildet (siehe Abb. 2):



$$\underbrace{\mathcal{A}(\kappa x + \lambda y)}_{\in W} = \underbrace{\kappa \underbrace{\mathcal{A}(x)}_{\in W} + \lambda \underbrace{\mathcal{A}(y)}_{\in W}}_{\in W}$$

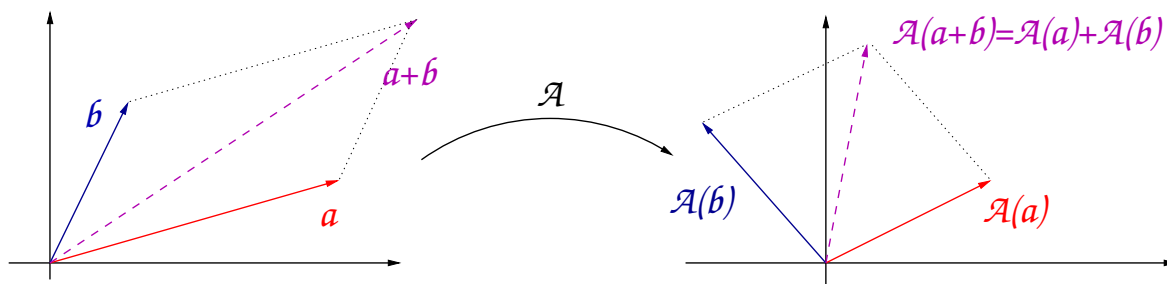


Abbildung 2: Eigenschaft einer linearen Abbildung

Beispiel 63 lineare und nichtlineare Abbildungen

(a)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x$$

ist eine lineare Abbildung.

(b)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

ist keine lineare Abbildung.

(c)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 2$$

ist keine lineare Abbildung.

(d)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x + 2$$

ist keine lineare Abbildung.

(e)

$$\int_0^1 \cdot dx : C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) \mapsto \int_0^1 f(x) dx$$

ist eine lineare Abbildung.

(f) Na? Ist e^x ein Homomorphismus? Wenn Satz 4.2 nicht erfüllt ist so können wir getrost diese Frage mit NEIN beantworten.



Eine lineare Funktion ist nicht zwingend eine lineare Abbildung.

Satz 4.2. Für eine lineare Abbildung \mathcal{A} gilt immer

$$\mathcal{A}(0) = 0.$$

Beweis Satz 4.2:

$$\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}(x - x) = \mathcal{A}(x) - \mathcal{A}(x) = 0$$

□



Satz 4.2 besagt, dass $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, W) \Rightarrow \mathcal{A}(0) = 0$. Es gilt aber noch lange nicht die Umkehrung, d.h. aus $\mathcal{A}(0) = 0$ folgt nicht, dass \mathcal{A} eine lineare Abbildung ist. Betrachten Sie etwa $\mathcal{A}(x) = x^2$.

Beispiel 64 Matrizen als lineare Abbildung

Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ erhalten wir mit Hilfe der Matrix-Vektor-Multiplikation durch die Vorschrift

$$\mathcal{A}(x) := Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k \end{pmatrix}$$

eine Abbildung $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$. Diese Abbildung ist linear.

Während hingegen eine Abbildung der Form $\mathcal{B} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ mit

$$\mathcal{B}(x) := Ax + b = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + b_1 \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}x_k + b_m \end{pmatrix}$$

nicht linear ist. Wir sehen direkt ein, dass $\mathcal{B}(0) \neq 0$ ist. Wir nennen \mathcal{B} eine *affine Abbildung*.

Beispiel 65 mehr lineare Abbildungen

1. Spiegelung an der y -Achse

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

2. Spiegelung an der x -Achse

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x$$

3. Drehung am Ursprung um den Winkel φ

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} x$$

4. Drehung am Punkt $M \neq 0$ um den Winkel φ ist eine affine, keine lineare Abbildung

$$\mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} (x - M) + M \notin \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

5. Die Projektion $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_{12}$:

$$\mathcal{P}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Definition 4.3 (Bild & Kern). Für $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, W)$ heißt ein Vektor $w \in W$ Bildvektor von \mathcal{A} , falls gilt:

$$\exists v \in V \mid \mathcal{A}(v) = w$$

Der UVR bestehend aus der Menge aller Bildvektoren

$$\text{Bild}(\mathcal{A}) := \{\mathcal{A}(v) \in W \mid v \in V\}$$

heißt Bild von \mathcal{A} .

Die Menge aller Vektoren, deren Bild der Nullvektor ist heißt Kern von \mathcal{A} und wird mit

$$\text{Kern}(\mathcal{A}) := \{v \in V \mid \mathcal{A}(v) = 0\}$$

bezeichnet.



Nicht jeder Vektor in W ist ein Bildvektor. Es kann aber Vektoren in W geben, die Bildvektoren von mehreren Vektoren in V sind. Besonders interessant sind Vektoren deren Bildvektor der Nullvektor ist.

Beispiel 66 Bild einer Abbildung Die orthogonale Projektion aus Beispiel 64 ist im Grunde eine Abbildung von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R}^3 . Es ist $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{P}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. Das Bild von \mathcal{P} ist aber nur die E_{12} -Ebene. Es ist etwa

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \text{Bild}(\mathcal{P}).$$

Für alle $x = (0, 0, x_3)^T$ ist $\mathcal{P}(x) = 0$, d.h. das der Kern der Abbildung gerade die ganze x_3 -Achse ist.

Der Kern einer linearen Abbildung, definiert über die Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times m}$ gemäß $\mathcal{A}(x) = Ax$ entspricht gerade der Lösungsmenge \mathbb{L} des homogenen LGS $Ax = 0$:

$$x \in \text{Kern}(\mathcal{A}) \iff Ax = 0$$

Beispiel 67 Kern einer Abbildung Es sei $\mathcal{A}(x) = Ax$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt

$$\text{Kern } \mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid Ax = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} t \mid t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beispiel 68 Kern einer Abbildung

Es sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x - y, y - x)$ gegeben.

- (a) f ist linear
- (b) f kann auch als Matrix-Vektor Produkt geschrieben werden

$$F : \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ -x + y \end{pmatrix}$$

- (c)

$$\text{Kern}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2\}$$

$$\text{Bild}(f) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = -x_2\}$$

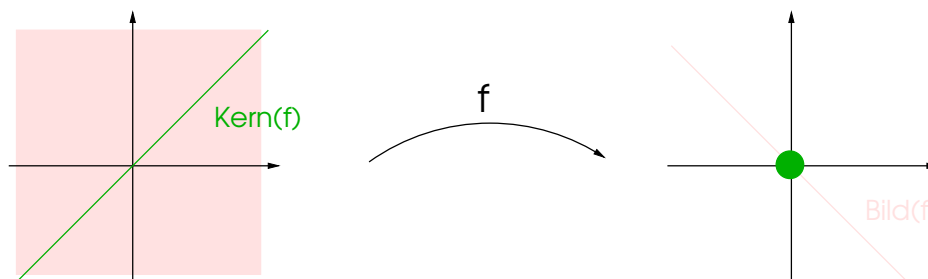


Abbildung 3: Kern und Bild einer linearen Abbildung

Ist $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, W)$, so bilden die Spaltenvektoren das Erzeugendensystem des Bildraumes. Sind alle Spaltenvektoren linear unabhängig, der Rang der Matrix also maximal, so ist das Erzeugendensystem (siehe Definition 3.5, S. 58) eine Basis des Bildraumes.

Es sei etwa $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ mit $\mathcal{A}(x) = Ax$ und $\mathcal{K} = \{e_1, \dots, e_n\}$ die Kanonische Basis des \mathbb{R}^n . Dann ist $\mathcal{A}(e_i)$ die i -te Spalte von A , denn

$$\mathcal{A}(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} =: a_i$$

Damit ist

$$\mathcal{B} = \{a_1, \dots, a_n\}$$

ein Erzeugendensystem von Bild (\mathcal{A}). Sind nun die Spalten von A linear unabhängig, d.h. $\text{rang}(A) = n$ oder auch $\det A \neq 0$ so ist \mathcal{B} sogar eine Basis von Bild (\mathcal{A}).

Schön, nicht? Wir werden später in Satz 4.7, S. 87 noch einmal darauf zu sprechen kommen.

Zunächst aber können wir diese Gegebenheit dahingehend gewinnbringend einsetzen, dass wir eine Matrix-Darstellung einer linearen Abbildung einfach und in wenigen Schritten berechnen können. Nicht immer ist das so einfach und direkt ersichtlich wie im Beispiel 68 Teil (c).

Beispiel 69 Matrix-Darstellung berechnen Es sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x - y, y - x)$ gegeben. Gesucht ist die Matrix-Darstellung

$$f(x_1, x_2) = \mathcal{F}(x) = A x.$$

Die Spaltenvektoren der Matrix A erhalten wir durch die Bildvektoren zur Kanonischen Basis $\{e_1, e_2\}$ von \mathbb{R}^2 :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e_1) &= A e_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = f(1, 0)^T = (1, -1)^T \\ \mathcal{F}(e_2) &= A e_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = f(0, 1)^T = (-1, 1)^T \end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$\mathcal{F}(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Wir wollen das an einem etwas komplexeren Beispiel nochmal betrachten.

Beispiel 70 Spiegelung an einer Geraden Es sei die Gerade

$$g = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x = v t, t \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2\} = \text{Span}(v)$$

in der Gaußschen Ebene gegeben. Wir wollen eine lineare Abbildung in Matrixdarstellung angeben, die eine Spiegelung eines Punktes $x \in \mathbb{R}^2$ an der Geraden g vornimmt; wie in Abbildung 4 dargestellt. Zunächst projizieren wir x orthogonal auf die Gerade und erhalten den Punkt $P(x) \in g$ mit $x - P(x) \perp g$:

$$P(x) = \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v$$

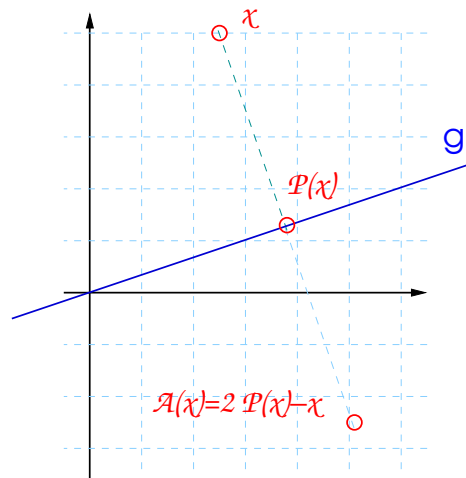


Abbildung 4: Spiegelung an einer Geraden

Es ist dann die Abbildung gegeben durch

$$\mathcal{A}(x) = 2P(x) - x = 2 \frac{\langle x, v \rangle}{\|v\|^2} v - x.$$

Was wir aber wollen ist eine Matrixdarstellung, also $\mathcal{A}(x) = Sx$. Wir erhalten die Spalten der Matrix S durch die Bildvektoren zu den Basisvektoren der Kanonischen Basis:

$$\mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = 2 \frac{\langle e_1, v \rangle}{\|v\|^2} v - e_1 = 2 \frac{v_1}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \frac{v_1^2}{\|v\|^2} - 1 \\ 2 \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A}(e_2) = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = 2 \frac{\langle e_2, v \rangle}{\|v\|^2} v - e_2 = 2 \frac{v_2}{\|v\|^2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \frac{v_2 v_1}{\|v\|^2} \\ 2 \frac{v_2^2}{\|v\|^2} - 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 2 \frac{v_1^2}{\|v\|^2} - 1 & 2 \frac{v_2 v_1}{\|v\|^2} \\ 2 \frac{v_1 v_2}{\|v\|^2} & 2 \frac{v_2^2}{\|v\|^2} - 1 \end{pmatrix} x$$

Lassen wir es mal konkret werden und wählen wie in [Abbildung 4](#) $v = (3, 1)^T$. Dann erhalten wir als Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x.$$

Es ist dann der an g gespiegelte Punkt $x = (2.5, 5)^T$ gegeben durch

$$\mathcal{A}\left(\begin{pmatrix} 2.5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2.5 \end{pmatrix}$$



Wir können auch eine Abbildung angeben zur Spiegelung an Geraden, die nicht durch den Ursprung verlaufen. Dies sind aber keine UVRen und wir erhalten dann auch keine lineare Abbildung sondern eine affine Abbildung. Eine Spiegelung an $g = a + tv$ ist dann in Matrix-Darstellung gegeben durch (s. Bsp 76)

$$\mathcal{B}(x) = S(x - a) + a = Sx + (E_2 - S)a.$$

Beispiel 71 Spiegelung an einer Ebene Es sei die Ebene $E = vt + ws$ gegeben, die als Spiegel diene. Ist $\{v, w\}$ eine Orthogonalbasis von E so kann man die Projektion eines Punktes $x \in \mathbb{R}^3$ auf E direkt hinschreiben. Gehen wir aber nicht davon aus, so projizieren wir x auf die Einheitsnormale $n = \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$ gemäß

$$D(x) = \langle x, n \rangle n.$$

Wir erhalten dann als projizierten Punkte auf E

$$P(x) = x - D(x) = x - \langle x, n \rangle n$$

und es ist dadurch der gespiegelte Punkt gegeben durch die Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = 2P(x) - x = x - 2 \frac{\langle x, v \times w \rangle}{\|v \times w\|^2} v \times w.$$

Das wollen wir jetzt in Matrix-Darstellung haben: Für $n = \frac{v \times w}{\|v \times w\|}$ gilt

$$\mathcal{A}(x) = Ax = (\mathcal{A}(e_1), \mathcal{A}(e_2), \mathcal{A}(e_3)) = \begin{pmatrix} 1 - 2n_1^2 & -2n_2n_1 & -2n_3n_1 \\ -2n_1n_2 & 1 - 2n_2^2 & -2n_3n_2 \\ -2n_1n_3 & -2n_2n_3 & 1 - 2n_3^2 \end{pmatrix} x.$$

Schauen wir uns etwas konkretes an: Wir wollen den Punkt $x = (1, 2, 2)^T$ an der Ebene $x_1 - x_2 = 0$ spiegeln. Es ist $n = (1, -1, 0)^T / \sqrt{2}$ und damit die Abbildung folgendermaßen gegeben:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Spiegeln wir $x = (1, 2, 2)^T$ an der Ebene so erhalten wir den Punkt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Fertigen Sie sich gerne eine Skizze dazu an.

Beispiel 72 **Abbildung von Strecken** Eine Strecke \overline{PQ} zwischen den Punkten P und Q besteht aus allen Punkten auf der Geraden, die durch P und Q verläuft, zwischen P und Q :

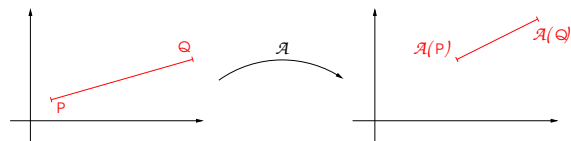
$$\overline{PQ} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = P + t(Q - P), t \in [0, 1]\}$$

Wird eine ganze Strecke durch $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ abgebildet, so erhalten wir wieder eine Strecke, nämlich

$$\mathcal{A}(\overline{PQ}) = \overline{\mathcal{A}(P)\mathcal{A}(Q)},$$

denn für $x \in \overline{PQ}$ gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) &= \mathcal{A}(P + t(Q - P)) \\ &= \mathcal{A}(P) + t(\mathcal{A}(Q) - \mathcal{A}(P)). \end{aligned}$$

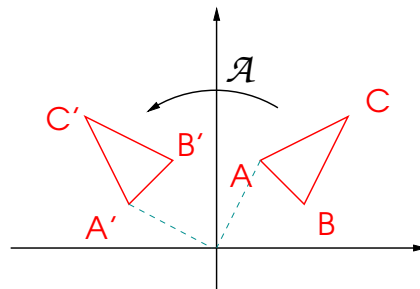


Beispiel 73 **Dreieck drehen** Es sei das Dreieck T durch die Eckpunkte $A = (1, 2)$, $B = (2, 1)$ und $C = (3, 3)$ gegeben. Wir drehen das Dreieck um den Winkel $\varphi = \frac{\pi}{4}$, indem wir jede Ecke mit

$$\mathcal{C}(x) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & -\sin \frac{\pi}{4} \\ \sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} \end{pmatrix} x$$

abbilden und erhalten das Bilddreieck T' :

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ B' &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ C' &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Beispiel 74 **Viereck skalieren** Es sei das Viereck Q durch die Punkte

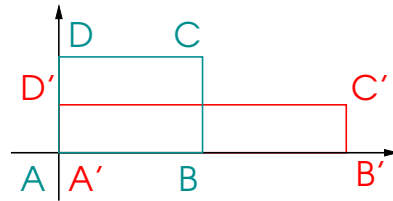
$$A = (0, 0), B = (3, 0), C = (3, 2) \text{ und } D = (0, 2)$$

gegeben. Es wird in x_1 -Richtung um den Wert $\alpha = 2$ und in x_2 -Richtung um den Wert $\beta = \frac{1}{2}$ mittels der Abbildung

$$\mathcal{S}(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} x$$

skaliert. Wir erhalten das neue Viereck mit den Ecken

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ C' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ D' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

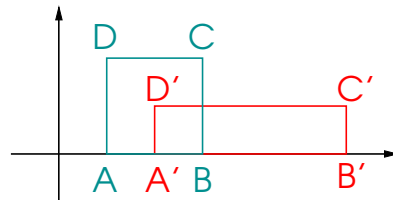


Die linke untere Ecke bleibt wo sie ist, da es zufällig der Nullpunkt ist und die lineare Abbildung diesen unverändert lässt. Wählt man zum Abbilden etwa das Viereck R durch die Punkte

$$A = (1, 0), B = (3, 0), C = (3, 2) \quad \text{und} \quad D = (1, 2)$$

so erhalten wir nach der Abbildung

$$\begin{aligned} A' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ B' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ C' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ D' &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



Definition 4.4 (Komposition). *Es seien $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow W$ Abbildungen. Dann heißt die Abbildung $g \circ f : U \rightarrow W$ mit*

$$(g \circ f)(x) := g(f(x))$$

Komposition oder zusammengesetzte Abbildung von f und g .

Satz 4.5. *Es seien $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ und $\mathcal{B} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^l)$ mit*

$$\mathcal{A}(x) = Ax \quad \text{und} \quad \mathcal{B}(y) = By,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $B \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $y \in \mathbb{R}^m$. Dann ist

$$\mathcal{C}(x) := (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) = Cx$$

mit

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^m B_{ik} A_{kj}$$

und $C \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^l)$.

Beispiel 75 Verkettung von Abbildungen

Es seien die Abbildungen

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x \quad \text{und} \quad \mathcal{B}(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x$$

gegeben. Dann lautet die Verkettung

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x) &= (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{A}(x) x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(x) &= (\mathcal{A} \circ \mathcal{B})(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \mathcal{B}(x) x \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Ganznebenbei bemerken wir, dass die Verkettung nicht kommutativ ist, was an der Nichtkommutativität der Matrixmultiplikation liegt.

Beispiel 76 Verkettung von Abbildungen

Bei der Spiegelung eines Punktes im \mathbb{R}^2 an einer Geraden $g : a + tv, a, v \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R}$, die nicht durch den Ursprung verläuft muss zunächst das ganze System in den Ursprung verschoben werden

$$\mathcal{A}(x) = x - a,$$

dann kann an der dadurch erhaltenen Geraden durch den Ursprung gespiegelt werden

$$\mathcal{B}(x) = Bx$$

und schlussendlich muss alles wieder in die ursprüngliche Position zurückgeschoben werden

$$\mathcal{C}(x) = x + a.$$

Das sind insgesamt zwei affine und eine lineare Abbildung, die man durch eine Verkettung zu einer Abbildung zusammenfassen kann:

$$\mathcal{D}(x) = (\mathcal{C} \circ \mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) = (\mathcal{B} \circ \mathcal{A})(x) + a = B \mathcal{A}(x) + a = B(x - a) + a = Bx + (E_2 - B)a$$

Die Verkettung von beliebig vielen linearen Abbildungen ist assoziativ und wieder eine lineare Abbildung. Das bedeutet, dass bei der Hintereinanderschaltung von linearen Abbildungen die Reihenfolge keine Rolle spielt.



$$f \circ (g \circ u) = (f \circ g) \circ u$$

$f \in \text{Hom}(V, W)$ sind ungerade, d.h. $f(-v) = -f(v)$. Das liegt ebenfalls an der Linearität.

Definition 4.6 (Bijektivität & Co). *Es sei $\mathcal{A} : V \rightarrow W$. Die Abbildung \mathcal{A} heißt*

- *injektiv, falls gilt: $\forall x_1, x_2 \in V \ x_1 \neq x_2 : \mathcal{A}(x_1) \neq \mathcal{A}(x_2)$,*
- *surjektiv, falls gilt: $\forall y \in W \ \exists x \in V : \mathcal{A}(x) = y$ und*
- *bijektiv, falls gilt: \mathcal{A} ist surjektiv und injektiv.*

Gilt überdies noch, dass $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, W)$ ist, so heißt \mathcal{A}

- Monomorphismus wenn \mathcal{A} injektiv ist,*
- Epimorphismus wenn \mathcal{A} surjektiv ist,*
- Isomorphismus wenn \mathcal{A} bijektiv ist,*
- Endomorphismus wenn $V = W$ ist und*
- Automorphismus wenn $V = W$ und \mathcal{A} bijektiv ist.*



Injektivität bedeutet also, dass je zwei verschiedenen Vektoren auch zwei verschiedene Bildvektoren zugeordnet werden. Surjektivität bedeutet, dass jeder Vektor in W erreicht wird. Gilt beides so ist durch \mathcal{A} eine eindeutige Abbildung gegeben, die jedem (!) Punkt in V genau einen (!) Punkt in W und umgekehrt jedem (!) Punkt in W genau einen (!) in V zuordnet.

Beispiel 77 injektive, surjektive und bijektive Abbildungen

(a) $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow E_{12}$ mit

$$\mathcal{P}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

ist eine surjektive Abbildung. Weil $\mathcal{B} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, E_{12})$ ist \mathcal{P} ein Epimorphismus. \mathcal{P} ist nicht injektiv.

(b) $\mathcal{P} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$\mathcal{P}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x$$

weder injektiv noch surjektiv. Da aber $V = \mathbb{R}^3 = W = \mathbb{R}^3$ ist nennen wir \mathcal{P} einen Endomorphismus.

(c) Die Spiegelung einer Geraden $h : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$ an der Geraden $g : \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} t$ gegeben durch die lineare Abbildung $\mathcal{A} : h \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\mathcal{A}(x) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} x$$

ist eine injektive Abbildung und somit ein Monomorphismus. Das Bild ist die Gerade

$$h' : \mathcal{A}(h) \tilde{t} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{t} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix} t.$$

Somit handelt es sich bei der Abbildung \mathcal{A} nicht um eine surjektive Abbildung.

(d) Schränken wir den Wertebereich von \mathcal{A} in (c) ein und definieren die Abbildung so: $\mathcal{A} : h \rightarrow h'$, so erhalten wir eine injektive und surjektive also eine bijektive Abbildung, bzw. einen Isomorphismus.

Beispiel (d) zeigt, dass die Frage nach Bijektivität im Wesentlichen die Frage nach Injektivität ist. Fehlt die Surjektivität, so schränkt man einfach den Wertebereich der Abbildung auf ihr Bild ein. Das kann man ja immer machen.

Satz 4.7 (Dimensionsformel für lineare Abbildungen). *Es seien V, W VRe endlicher Dimension und $f \in \text{Hom}(V, W)$. Dann gilt*

$$\text{Dim } V = \text{Dim Kern } f + \text{Dim Bild } f. \quad (4)$$

Wir sagen auch $\text{rang } f = \text{Dim Bild } f$ und schreiben

$$\text{Dim } V = \text{Dim Kern } f + \text{rang } f.$$



Ist die lineare Abbildung über eine Matrix erklärt, sagen wir $\mathcal{A}(x) = Ax$ so bezeichnet $\text{rang } \mathcal{A}$ gerade den Rang der Matrix A : $\text{rang } \mathcal{A} = \text{rang } A$. Die Dimensionsformel (4) lautet dann auch

$$\text{Dim } V = \text{Dim Kern } \mathcal{A} + \text{rang } A.$$

Nun können wir auch einsehen, dass der Kern einer linearen Abbildung aus verschiedenen Gründen interessant ist: Wir können etwa an ihm ablesen, ob die Abbildung injektiv ist. Das ist nämlich genau dann der Fall, wenn der Kern nur aus dem Nullvektor besteht. Dieser liegt immer im Kern, denn es gilt nach Satz 4.2 stets für lineare Abbildungen, dass $\mathcal{A}(0) = 0$.

Definition 4.8 (Umkehrabbildung). *Ist*

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

bijektiv also ein Isomorphismus, so heißt

$$\begin{aligned} f^{-1} : Y &\rightarrow X \\ f(x) &\mapsto x \end{aligned}$$

die Umkehrabbildung von f .

Es ist

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$



Die Umkehrabbildung eines Isomorphismus ist selbst wieder ein Isomorphismus. Wir schreiben dann auch

$$f : X \xrightarrow{\cong} Y$$

Wir sagen die Räume X und Y sind *isomorphe Räume*.

Ist $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, W)$ mit $\mathcal{A}(x) = Ax$ ein Isomorphismus erhalten wir die Umkehrabbildung $\mathcal{A}^{-1} \in \text{Hom}(W, V)$ über die Inverse der Matrix A^{-1} :

Sei zunächst $\mathcal{A}^{-1}(x) = Bx$, dann gilt

$$(\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A})(x) = BAx = x \quad \Leftrightarrow \quad B = A^{-1}$$

Also ist $\mathcal{A}^{-1}(x) = A^{-1}x$.

Beispiel 78 Es sei die Abbildung $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gegeben mit

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Die Matrix A aus $\mathcal{A}(x) = Ax$ ist regulär und somit ist \mathcal{A} ein Isomorphismus und besitzt eine Umkehrabbildung \mathcal{A}^{-1} . Sie errechnet sich aus der Inversen A^{-1} von A und lautet demnach

$$\mathcal{A}^{-1}(x) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x.$$

Die Komposition von \mathcal{A} und \mathcal{A}^{-1} liefert die *Identität* $\mathcal{I}(x) = E_3 x = x$:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^{-1})(x) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(x) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} x \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x = x
 \end{aligned}$$



Eine inverse Matrix gibt es, wenn die Matrix A quadratisch ist, also $\text{Dim } V = \text{Dim } W =: n$ und $\text{rang } A = n$. Das wiederum heißt, dass nur der Nullvektor die Gleichung $Ax = 0$ erfüllt, was gleichbedeutend ist mit $\text{Kern } \mathcal{A} = \{0\}$. Damit ergibt sich die Dimensionsformel

$$n = \text{Dim } V = \text{Dim Kern } \mathcal{A} + \text{rang } A = 0 + n \quad \checkmark$$

Satz 4.9. *Es sei $f \in \text{Hom}(V, W)$. Dann gilt*

- (i) *Kern f ist ein UVR von V .*
- (ii) *Kern $f = \{0\} \Leftrightarrow f$ ist injektiv*
- (iii) *Ist $U \subset V$ ein UVR von V , dann ist $f(U) \subset W$ ein UVR von W .*

Beweis Satz 4.9:

- (i) *Zu zeigen ist hier, dass für $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $a, b \in \text{Kern } f$ immer $\alpha a + \beta b \in \text{Kern } f$ gilt. Das erhalten wir aber gerade über die Linearität von f , denn*

$$f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b) = \alpha 0 + \beta 0 = 0.$$

- (ii) *Kern $f = \{0\} \Leftrightarrow f$ ist injektiv*

“ \Leftarrow ” *Angenommen es gebe ein $a \in \text{Kern } f$ mit $a \neq 0$, dann folgte daraus ein Widerspruch zur Injektivität von f , denn es wäre dann*

$$f(a) = 0 = f(0).$$

Es würden also zwei verschiedene Vektoren auf ein und denselben, nämlich 0 abgebildet werden.

“ \Rightarrow ” Die Aussage

$$“(\text{Kern } f = \{0\}) \Rightarrow (f \text{ ist injektiv})”$$

ist äquivalent zur Aussage

$$“\neg (f \text{ ist injektiv}) \Rightarrow \neg (\text{Kern } f = \{0\})”$$

bzw

$$“(f \text{ ist nicht injektiv}) \Rightarrow (\exists a \in V a \neq 0 : f(a) = 0)”$$

Die neue Voraussetzung ist, dass f nicht injektiv ist. Es existieren also $a, b \in V$ mit $a \neq b$ und $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow & f(a) - f(b) = 0 \\ \Rightarrow & f(a - b) = 0 \\ \Rightarrow & \underbrace{a - b}_{\neq 0} \in \text{Kern } f \end{aligned}$$

Damit besteht dann auch der Kern aus mehr als einem Vektor.

(iii) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ und $a, b \in U$. Da U ein UVR von V ist, gilt $\alpha a + \beta b \in U$. Dann ist $f(a), f(b), f(\alpha a + \beta b) \in W$ und wegen der Linearität von f gilt auch $f(\alpha a + \beta b) = \alpha f(a) + \beta f(b)$ und damit ist dann automatisch

$$\alpha f(a) + \beta f(b) \in W \quad \forall f(a), f(b) \in W.$$

□

Ist $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ über eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mit $A = (a_1, \dots, a_n)$, $a_i \in \mathbb{R}^m$, $i = 1, \dots, n$ gemäß

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

definiert, so gilt folgendes

- Das Bild von \mathcal{A} wird durch die Spaltenvektoren der Matrix A erzeugt:

$$\text{Bild } \mathcal{A} = \text{Span}(a_1, \dots, a_n)$$

- Die Einheitsvektoren $e_k, k = 1, \dots, n$ von \mathbb{R}^n werden auf die Spaltenvektoren abgebildet:

$$a_k = \mathcal{A}(e_k)$$

-

$$\text{Kern } \mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$$

- Die Dimension des Bildes ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Spalten von \mathcal{A} .

Beispiel 79 Basis des Bildraums Es sei $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ gegeben durch

$$\mathcal{A}(x) = Ax = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x.$$

Die Determinante von A lautet

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 2(-2) = 0.$$

Das bedeutet, dass die Abbildung nicht injektiv ist. Die Dimension des Kerns ist also größer als 0 und nach der Dimensionsformel in Satz 4.7 bedeutet dies, dass die Dimension des Bildraums kleiner als 3 ist. Es bilden also die Spalten von A zwar ein Erzeugendensystem vom Bild, nicht aber eine Basis. Bei der Berechnung des Kerns lösen wir das homogene LGS

$$Ax = 0$$

und bringen dazu die Matrix A in Stufenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III+II}]{\text{(II-2I)/3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aus der Stufenform können wir dann zum einen die Lösung des LGS ablesen, was uns den Kern der Abbildung liefert, nämlich

$$\text{Kern } \mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

und zum andern sehen wir, dass die ersten beiden Spaltenvektoren linear unabhängig sind und somit die Basis des Bildraums darstellen:

$$\text{Bild } \mathcal{A} = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Es gilt

$$\dim \text{Kern } \mathcal{A} + \dim \text{Bild } \mathcal{A} = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3.$$

Kern und Bild eines Endomorphismus $\mathcal{A} \in \text{Hom}(V, V)$ bilden eine direkte Summe, welche den Gesamttraum V darstellt.

Kleine zusätzliche Begriffklärung:

4 Lineare Abbildungen

- Eine Funktion der Form $f(x) = ax + b$ heißt *affin-linear*. f kann eine beliebige lineare Abbildung sein, die noch eine konstante Verschiebung beinhaltet.
- Ein *affiner Raum* ist "so etwas wie" ein Vektorraum ohne Ursprung, das heißt es gibt zu je zwei Punkten A, B einen Vektor \overrightarrow{AB} , so dass die Verschiebung um diesen Vektor A auf B abbildet. Die Menge dieser Verschiebungen bildet einen Vektorraum, aber im affinen Raum selbst gibt es keinen ausgezeichneten Punkt wie den Ursprung eines Vektorraums. Beispielsweise sind Geraden und Ebenen im Anschauungsraum ($=\mathbb{R}^3$) affine Räume.
- Wir sprechen von einem *affinen Koordinatensystem*, wenn die Koordinatenachsen durch Geraden gebildet werden.

Die Definitionen für affine oder affin-lineare Abbildung und affiner Raum sind allgemeiner gehalten. Diese Begriffsklärungen sollten uns aber genügen.

Eigenwerte und Eigenvektoren

5

Wir behandeln:

- Determinante einer Matrix
- Eigenwert und Eigenvektor
- Basiswechsel und Diagonalisierung

Das große Ziel dieses Kapitels, was meines Erachtens auch das spannendste Kapitel in dieser zweisemestrigen Vorlesung ist, ist der Basiswechsel. Wir sprechen hier von der Darstellung von Matrizen zu verschiedenen Basen. Es ist im Grunde das Gleiche wie die Berechnung von Koordinatenvektoren (s. Definition 3.8, S. 62). Führen wir einen bestimmten Basiswechsel an einer Matrix einer affinen Abbildung durch so erlaubt dies uns das Lösen praxisnaher Problemstellungen auf besonders elegante Art und Weise. Für diesen speziellen Basiswechsel ist es unablässig, sich die Begriffe Eigenwert und Eigenvektor zu Eigen zu machen. Schon mit der Kenntniss dieser Werte kann man interessante Anwendungsbeispiele behandeln. Also schon das lohnt sich. Neben der Fragestellung "was ist ein Eigenwert" und "was ist ein Eigenvektor" steht die Frage danach wie man diese berechnet. Bei der Antwortfindung wird uns die Determinante wieder begegnen und darum wollen wir die Mühe nicht scheuen und uns dieses altenbekannten Begriffs noch einmal widmen. Zum einen, um ihn wieder in die vorderen Hirnwindungen zu katapultieren und zum anderen, um ihm die gebührende Ehre zu erweisen, ihn auf die ihm eigene, mathematische Weise zu definieren, was wir, wohl bemerkt, bislang noch gar nicht getan haben.²

²“Wenngleich es einen Göttinger Physiko-Chemiker und Nobelpreisträger namens Manfred Eigen gibt, ist dieser doch nicht Namensgeber für die der linearen Algebra entstammenden Begriffe Eigenvektor und Eigenwert, die im Englischen als *eigenvector* und *eigenvalue* gebräuchlich sind. Vielmehr wird *eigen* hier in der Bedeutung charakteristisch, eigentümlich, einer Sache innewohnend gebraucht.

Die Begriffe in dieser Bedeutung prägte David Hilbert in seinem Artikel Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen aus dem Jahre 1904, veröffentlicht in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. Eingeführt werden sie dort auf Seite 51:

Insbesondere in dieser ersten Mitteilung gelange ich zu Formeln, die die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach gewissen ausgezeichneten Funktionen, die ich Eigenfunktionen nenne, liefern: [] Dieser Erfolg ist wesentlich durch den Umstand bedingt, da ich nicht, wie es bisher geschah, in erster Linie auf den Beweis für die Existenz der Eigenwerte ausgehe, sondern vielmehr zunächst ein allgemeines Entwicklungstheorem (S. 6970) aufstelle und dann aus diesem ohne Mühe die Bedingungen für die Existenz der Eigenwerte und Eigenfunktionen abzuleiten vermag.

Manfred Eigen wurde im Jahre 1927 geboren und scheidet damit als Namenspatron klar aus.

5.1 Bedeutung der Determinante für affine Abbildungen

Satz & Definition 5.1 (Determinante). *Es gibt genau eine Abbildung $\det : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(D1) \det ist linear in jeder Zeile.

(D2) Ist $\text{rang}(A) < n$ dann gilt $\det A = 0$.

(D3) $\det E = 1$

Diese Abbildung heißt Determinante und die Zahl $\det A \in \mathbb{K}$ heißt Determinante von A .

Wir haben die Determinante einer Matrix, jetzt als Abbildung, bereits in Kapitel 2.4 kennengelernt. Streng genommen ist aber die Definition 5.1 die eigentliche Definition einer Determinante, jetzt als Abbildung aufgefasst. Man kann zeigen, dass es nur eine Abbildung gibt, die die Eigenschaften (D1) bis (D3) erfüllt und die stimmt überein mit der, die wir in Kapitel 2.4 bereits betrachtet haben.

Alle Eigenschaften der Determinante in Satz 2.19 lassen sich durch die Axiome (D1) bis (D3) beweisen.

Wir wollen nun die Determinante als etwas betrachten, das uns eine spezielle Information über Abbildungseigenschaften verrät. Wir erinnern uns an Kapitel 2.4. Dort hatten wir die Determinante hergeleitet, um das Volumen eines Spats zu berechnen:

Für $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gilt

$$\det A = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle,$$

wobei die a_i die Spaltenvektoren von A sind und $\langle \cdot, \cdot, \cdot \rangle$ das Spatprodukt im \mathbb{R}^3 beschreibt. Ist V_e der Einheitswürfel mit Volumen $|V_e| = 1$, der von e_1, e_2, e_3 aufgespannt wird, und V_a der Spat, den wir durch $\mathcal{A} : V_e \rightarrow V_a$ erhalten, so beschreibt $|\det A|$ das Volumen, des von a_1, a_2, a_3 aufgespannten Spates, also $|V_a| = |\det A|$.



Die Determinante einer zu einer affinen, insbesondere linearen Abbildung gehörenden Matrix ist ein Maß für Streckungs- und Stauchungseigenschaften der Abbildung.

Wir wollen uns das an einer Reihe Beispiele vergegenwärtigen. Es ist in dieser Situation das Beste was man tun kann.

Beispiel 80 Skalierungseigenschaften von Abbildungen

Es sei immer $\Phi_A(x) = Ax$ und $\Phi_{A,b}(x) = Ax + b$.

Der älteste Beleg für den Gebrauch dieser mathematischen Begriffe im Englischen findet sich laut Oxford English Dictionary in der Zeitschrift Nature vom 23. Juli 1927." (Quelle: <http://faql.de/etymologie.html>)

(a) Es seien

$$\begin{array}{lllll} \hat{T} & \text{gegeben durch die Punkte} & \hat{a} = (0, 0) & \hat{b} = (1, 0) & \hat{c} = (0, 1) \\ T & \text{gegeben durch die Punkte} & a = (2, 2) & b = (3, 4) & c = (5, 2) \end{array}$$

Die Abbildung

$$\Phi_{A,a}(\hat{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bildet \hat{T} auf T ab. Die Determinante der Matrix in $\Phi_{A,a}$ im Betrag beschreibt die Änderung des Flächeninhalts der Dreiecke durch die Abbildung:

$$3 = |T| = |\hat{T}| |\det A| = \frac{1}{2} 6$$

(b) Bei der Streckung in x_1 - und x_2 -Richtung

$$\Phi_B(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} x$$

wird das Standarddreieck \hat{T} mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}$ auf das Dreieck durch die Punkte $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$ und $(0, \beta)$ mit dem Flächeninhalt

$$\frac{1}{2} \alpha \beta = |\hat{T}| |\det B| = |T|$$

abgebildet.

(c) Die Scherung

$$\Phi_C(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

erhält den Flächeninhalt des abgebildeten Objekts, denn es gilt

$$\det C = 1.$$

(d) Die Drehung

$$\Phi_D(x) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} x$$

ändert am Flächeninhalt ebenfalls nichts. Es gilt

$$\det D = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Besitzt eine affine Abbildung $\Phi_{F,f}(x)$ eine Umkehrabbildung $\Phi_{F,f}^{-1} = F^{-1}(x - f)$ so ist der Skalierungsfaktor der inversen Abbildung gerade der Kehrwert des Skalierungsfaktors von $\Phi_{F,f}$, denn

$$\det F^{-1} = \frac{1}{\det F}.$$

Siehe dazu nochmal Folgerung 2.20.

Beispiel 81 Die Umkehrabbildung von $\Phi_B(x)$ aus Beispiel 80, (b) lautet

$$\Phi_B^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix} x$$

und der Skalierungsfaktor lautet

$$|\det B^{-1}| = \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{1}{|\det B|}.$$

Bei der Verkettung von Abbildungen multiplizieren sich die Skalierungsfaktoren, da (siehe Satz 2.19, 5.)

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

gilt.

Beispiel 82 Es sei $\Phi_{G,g}$ die Abbildung des Dreiecks S , gegeben durch die Ecken $(0, 0)$, $(2, 0)$ und $(0, 4)$ auf das Dreieck T aus Beispiel 80 (a). Wir bilden $\Phi_{G,g}$ aus der Komposition von $\Phi_{A,a}$ und Φ_B^{-1} mit $\alpha = 2$ und $\beta = 4$:

$$\begin{aligned} \Phi_{G,g}(x) &= (\Phi_{A,a} \circ \Phi_B^{-1})(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \Phi_B^{-1}(x) + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\frac{3}{4} = |\det G| = |\det A| \cdot |\det B^{-1}| = |\det A| \cdot \frac{1}{|\det B|} = 6 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}.$$

well

5.2 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenvektoren gehören immer zu einer Abbildung und Eigenwerte immer zu einem Eigenvektor. Ein Eigenvektor einer Abbildung ist ein Vektor, der unter der Abbildung seine Richtung nicht ändert, etwa die Drehachse bei einer Drehung. Er kann aber durchaus seine Länge ändern und der entsprechende Skalierungsfaktor ist dann der Eigenwert. Eigenwert 1 bedeutet demnach, dass ein Vektor, hier der Eigenvektor, nicht nur seine Richtung sondern auch seine Länge beibehält. Er bleibt also unangetastet. Jetzt mathematisch:

Definition 5.1 (Eigenwert und Eigenvektor). Sei V ein VR und $f \in \text{Hom}(V, V)$. Unter einem Eigenvektor v von f zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ verstehen wir den Vektor $v \in V \setminus \{0\}$ mit der Eigenschaft

$$f(v) = \lambda v.$$



Eigenvektoren behalten unter der Abbildung f die Richtung bei. Der Eigenwert beschreibt dann gerade die Längenskalierung des Eigenvektors.

Da stellt sich gleich die spannende Frage: "Wie berechnen wir EVen und EWe? Eigenvektoren sind offensichtlich Elemente des Kerns der Abbildung

$$(f - \lambda \text{Id})(v).$$

Wir müssen also den Kern einer Abbildung berechnen. Das ist gut, denn das haben wir ja schon kräftig geübt. Allerdings können wir das nur dann konkret, wenn ein EW λ schon vorhanden ist. Wir brauchen also erst mal den EW.

Betrachten wir einmal die Abbildung $\mathcal{A} \in \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ der Gestalt $\mathcal{A}(x) = Ax$. Wir suchen Vektoren $v \in \mathbb{R}^n$ und Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ mit

$$Av = \lambda v.$$

Oder anders geschrieben

$$(A - \lambda E_n)v = 0.$$

Wir sehen ein homogenes Gleichungssystem und suchen Lösungen v zu verschiedenen Skalaren λ . Den trivialen Fall $v = 0$ lassen wir aus, denn die Null ist kein EV. Damit haben wir unser Problem dahingehend umformuliert, dass wir Elemente des Kerns der Abbildung $(A - \lambda E_n)v$ berechnen wollen. Und zwar solche, die nicht Null sind. Wann enthält denn der Kern mehr als die Null? Nun, wenn die Matrix singulär ist, das heißt wenn ihre Determinante verschwindet. Im ersten Schritt ermitteln wir diejenigen λ , für die

$$\det(A - \lambda E_n) = 0$$

gilt.

Beispiel 83 Eigenwert einer Matrix | Wir bestimmen die Eigenwerte λ der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen λ , so dass

$$\det(A - \lambda E_2) = 0$$

erfüllt ist.

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda E_2) &= \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (1 - \lambda)^2 = 0\end{aligned}$$

Diese Matrix hat den EW $\lambda = 1$. Diejenigen Vektoren, welche auch immer das sind, die unter der Abbildung $\mathcal{A} = Ax$ ihre Richtung beibehalten, werden auch nicht in ihrer Länge verändert.

Satz & Definition 5.2 (charakteristisches Polynom). *Sei V ein VR mit $\dim(V) = n$ und $f \in \text{Hom}(V, V)$. Dann gibt es Elemente $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ mit*

$$p_f(\lambda) := \det(f - \lambda \text{Id}) = (-1)^n \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}.$$

p_f heißt charakteristisches Polynom von f .

Beispiel 84 Eigevektor einer Matrix zum Eigenwert Wir bestimmen die EVen der Matrix A aus Beispiel 83 zum EW $\lambda = 1$.

$$\text{Kern}(A - E_2) = \text{Kern}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Also behalten alle Vektoren auf der x_1 -Achse sowohl ihre Richtung als auch ihre Länge bei. Wir überzeugen und eben noch davon:

$$A e_1 t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

Anschaulich klar, denn die Abbildung beschreibt eine Scherung an der x_1 -Achse.



Die Eigenwerte einer Matrix A sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms von \mathcal{A} mit $\mathcal{A}(x) = Ax$. Da nach dem Fundamentalsatz der Algebra ein Polynom über \mathbb{C} immer mindestens eine Nullstelle in \mathbb{C} besitzt gibt es für eine Matrix in $\mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ auch immer mindestens einen Eigenwert. Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt das mit Sicherheit nur dann, wenn $n = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, das heißt wenn n ungerade ist.

Beispiel 85 Eigenwert einer Drehung im \mathbb{R}^2 Wir berechnen die Eigenwerte zur Drehung.

$$\det \begin{pmatrix} \cos \phi - \lambda & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2 \cos \phi \lambda + 1 = 0$$

⇔

$$\lambda_{1,2} = \cos \phi \pm \sqrt{-\sin^2 \phi} = \cos \phi \pm i \sin \phi$$

Wir erhalten in diesem Fall nur dann einen reellen EW, wenn $\sin \phi = 0$ ist also wenn $\phi = k \pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Für den EW gilt dann

$$\lambda = \begin{cases} 1 & \text{für } \phi = 2n\pi \\ -1 & \text{für } \phi = (2n+1)\pi \end{cases}, n \in \mathbb{Z}$$

Anschaulich bedeutet das, dass es nur reelle EWe und zugehörige EVen gibt bei Drehungen um 180 bzw. 360 Grad. Wie sieht es in diesem Fall mit den EVen aus?

EVen zum EW $\lambda = 1$:

$$\text{Kern}(D - 1 E_2) = \text{Kern} \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ 0 & 1-1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

EVen zum EW $\lambda = -1$:

$$\text{Kern}(D - (-1) E_2) = \text{Kern} \begin{pmatrix} -1+1 & 0 \\ 0 & -1+1 \end{pmatrix} = \mathbb{R}^2$$

Ist der Drehwinkel $\phi \neq k \pi$ so erhalten wir nur komplexe EWe. Das macht aber nix. Damit können wir auch rechnen:

EVen zum EW $\lambda = \cos \phi + i \sin \phi$:

$$\begin{aligned} \text{Kern} \begin{pmatrix} \cos \phi - \lambda & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi - \lambda \end{pmatrix} &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -i \sin \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & -i \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -i \sin \phi & \sin \phi \\ i \sin \phi & -\sin \phi \end{pmatrix} \\ &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -i \sin \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{C}^2 \mid v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} t \right\} \end{aligned}$$

EVen zum EW $\lambda = \cos \phi - i \sin \phi$:

$$\begin{aligned}
 \text{Kern} \begin{pmatrix} \cos \phi - \lambda & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi - \lambda \end{pmatrix} &= \text{Kern} \begin{pmatrix} i \sin \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & i \sin \phi \end{pmatrix} \\
 &= \text{Kern} \begin{pmatrix} i \sin \phi & \sin \phi \\ -i \sin \phi & -\sin \phi \end{pmatrix} \\
 &= \text{Kern} \begin{pmatrix} i \sin \phi & \sin \phi \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \left\{ v \in \mathbb{C}^2 \mid v = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} t \right\}
 \end{aligned}$$

Beispiel 86 Berechnung der Drehachse Folgende Abbildung beschreibt eine Drehung im Raum um den Winkel $\frac{\pi}{4}$, bzw 45° . Welches ist die Drehachse?

$$\Phi(x) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 1 + \sqrt{2} & 1 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} & 1 & 1 + \sqrt{2} \end{pmatrix} x$$

Da es sich um eine Drehung handelt können wir davon ausgehen, dass die Matrix einen Eigenwert $\lambda = 1$ hat. Wir wollen uns dennoch davon überzeugen. Es sollte hier $\det(A - E_3) = 0$ erfüllt sein.

$$\begin{aligned}
 \det(A - E_3) &= \frac{1}{27} \det \begin{pmatrix} \sqrt{2} - 2 & 1 - \sqrt{2} & 1 \\ 1 & \sqrt{2} - 2 & 1 - \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} \\
 &= \left((\sqrt{2} - 2)^3 + (1 - \sqrt{2})^3 + 1 - 3(1 - \sqrt{2})(\sqrt{2} - 2) \right) \frac{1}{27} = 0
 \end{aligned}$$

Gut. Dann suchen wir jetzt einen zugehörigen EV. Diesen finden wir im Kern von $(A - E_3)$. Dazu bringen wir $(A - E_3)$ zunächst auf Stufenform und führen, um die Situation etwas übersichtlicher zu gestalten, Hilfsvariablen $a := \sqrt{2} - 2$ und $b := 1 - \sqrt{2}$ ein. Dann erhalten wir die Umformungen

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 1 & a & b \\ b & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \cdot b \text{ II}]{\text{a II} \cdot \text{I}} \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a^2 - b & ab - 1 \\ 0 & 1 - ab & a - b^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III}/(1-ab) \cdot \text{II}/(a^2-b)} \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & a^2 - b & ab - 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Lösungsmenge \mathbb{L} des homogenen LGS $(A - E_3)v = 0$ zu

$$\mathbb{L} = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Bevor es weiter geht fassen wir das Bisherige zusammen:

Berechnung der Eigenwerte und -vektoren einer Matrix: Sei $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Einheitsmatrix und $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.

$\lambda \in \mathbb{K}$ ist EW von $\mathcal{A}(x) = Ax$, wenn

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

$v \in \mathbb{K}^n$ ist EV von A zum Eigenwert λ , falls

$$v \in \text{Kern}(A - \lambda E) \setminus \{0\}.$$



Ein Eigenwert kann den Wert 0 annehmen, aber der Nullvektor ist nicht als Eigenvektor zugelassen. Eigenvektoren gehören immer zu einem Eigenwert. Der Nullvektor erfüllt aber die Gleichung $f(0) = \lambda 0$ immer, ganz gleich welchen Wert λ annimmt.

Die EVen, die wir erhalten sind immer Elemente der Lösungsmenge eines homogenen LGS. Das sind ja unendlich viele und jeder davon ist ein - und deshalb sagen wir ein und nicht der - EV. In den vorangegangenen Beispielen war die Lösungsmenge jeweils eine Gerade, so dass alle möglichen EVen zueinander linear abhängig sind. Es ist aber möglich, dass wir zu einem einzigen EW EVen erhalten, die Elemente einer Ebene oder eines noch höher dimensional Vektorraumes sind.

Beispiel 87

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 3 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = (2 - \lambda)^2$ hat die Nullstelle $\lambda = 2$ mit algebraischer Vielfachheit 2. Nun berechnen wir EVen:

$$(A - 2E_2)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R}$$

Beispiel 88

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat die charakteristische Gleichung

$$\det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2 = 0.$$

Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = (2 - \lambda)^2$ hat die Nullstelle $\lambda = 2$ mit algebr. Vfh 2. Nun berechnen wir EVen:

$$(A - 2E_2)v = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v = 0 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

In beiden Beispielen erhalten wir einen jeweils den EW 2 mit algebr. Vfh 2. In Beispiel 87 sind die zugehörigen EVen Elemente einer Geraden, wir sagen er hat die geometrische Vielfachheit 1, und in Beispiel 88 sind die zugehörigen EVen Elemente einer Ebene und wir sagen er habe die geom. Vfh ³ 2. Die algebr. Vfh bezeichnet die Vfh des entsprechenden Linearfaktors im charakteristischen Polynom und die geom. Vfh entspricht der Dimension der Lösungsmenge \mathbb{L} des homogenen LGS $(A - \lambda E)v = 0$. Diese beiden Vfh werden noch eine besondere Bedeutung erhalten und sind es Wert weitere Begrifflichkeiten zu definieren:

Definition 5.2 (Eigenraum). Sei $f \in \text{Hom}(V, V)$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ ein EW von f . Dann heißt

$$U_\lambda = \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

Eigenraum von f zum EW λ .



$$0 \in U_\lambda !!!$$

Satz 5.3. Sei $\text{Dim } V = n$ und $f \in \text{Hom}(V, V)$. Sei $\mu \in \mathbb{K}$ ein EW von f der Vfh r , das heißt

$$p_f(\lambda) = (\mu - \lambda)^r \cdot q(\lambda).$$

Dann gilt

$$\text{Dim } U_\mu \leq r.$$

Beweis Satz 5.3:

ohne Beweis

Satz 5.4. Sei $\text{Dim } V = n$ und $f \in \text{Hom}(V, V)$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ pww ⁴ EWe von f und zugehörigen EVen $v_1, \dots, v_r \in V$. Dann sind die v_i , $i = 1, \dots, r$ linear unabhängig.

³Vielfachheit

⁴pww=paarweise verschieden

Beweis Satz 5.4:

Es gebe OE^5 zwei EWe λ_1 und λ_2 und zugehörige EVen v_1 und v_2 . Wären diese linear abhängig, gelte also $v_1 = \alpha v_2$ dann wäre v_2 ebenfalls ein EV zum EW λ_1 , denn es gelte

$$A v_1 = \lambda_1 v_1 \Leftrightarrow A \alpha v_2 = \lambda_1 \alpha v_2 \Leftrightarrow A v_2 = \lambda_1 v_2.$$

Dieses Grundprinzip lässt sich sukzessive auf höhere Raumdimensionen übertragen. □



Wenn Sie also zu $f \in \text{Hom}(V, V)$ EWe und zugehörige EVen berechnet haben so erzeugen diese Eigenräume, die jeweils UVRs zu V sind. Die Basisvektoren der jeweiligen Eigenräume sind linear unabhängig, was bedeutet, dass die Summe der Eigenräume direkt ist (siehe Definition 3.26, S. 72)

Beispiel 89

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

EWe:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E_3) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \det \begin{pmatrix} -\lambda & -2 \\ 1 & 3 - \lambda \end{pmatrix} = (2 - \lambda)^2(1 - \lambda) = 0 \end{aligned}$$

EVen zu $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$U_2 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s, t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

EVen zu $\lambda = 1$:

⁵Ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III+I, -I}]{\text{II+I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

⇒

$$U_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \mid v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Es ist

$$\mathbb{R}^3 = U_1 \oplus U_2.$$

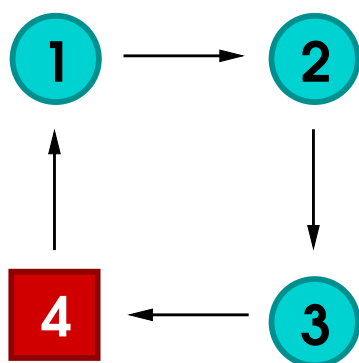
In Beispiel 87 galt $U_2 \subset \mathbb{R}^2$ und in Beispiel 88 dagegen $U_2 = \mathbb{R}^2$.

In Abbildung 5 ist noch einmal alles, was wir in diesem Kapitel besprochen haben in einer Übersicht zusammengefasst. Alles zu Eigenräumen und algebr. sowie geom. Vfh bekommt im übernächsten Unterkapitel (Kapitel 6) besondere Bedeutung. Zunächst wollen wir uns zur Entspannung, denn das haben wir jetzt verdient, ein paar hübsche Anwendungsbeispiele anschauen.

5.3 Anwendungsbeispiele zu Eigenwerten und Eigenvektoren

Beispiel 90 MiniPoly

Wir entwickeln ein Miniaturmonopoly und berechnen, ob der Spielverlauf interessant oder langweilig sein wird.



Spielregeln:

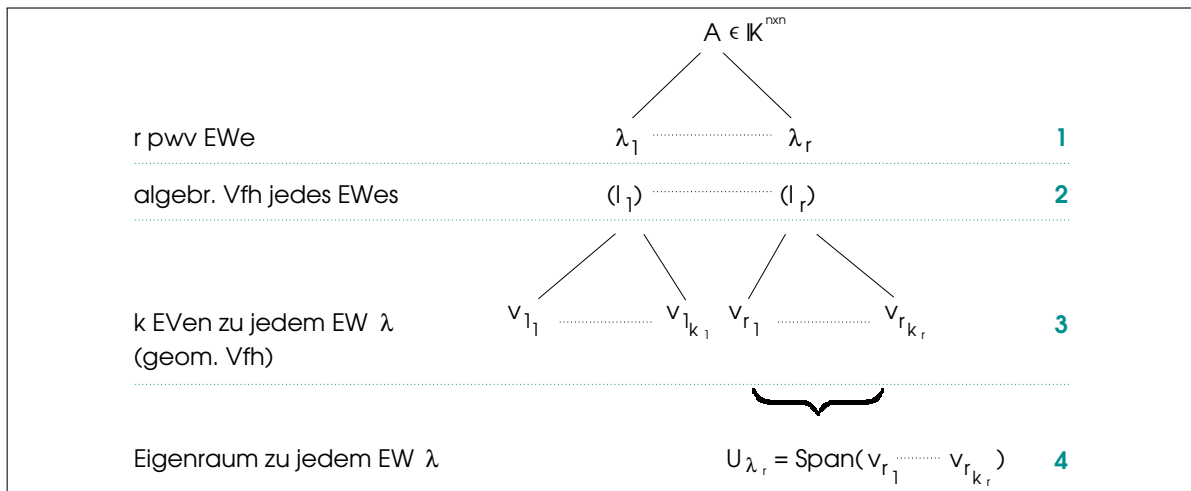
- Gestartet wird auf einem beliebigen Feld.
- Auf 1-3 wird 1 Mal gewürfelt.
- Auf 4 kommt man mit einer 6 auf die 1, sonst bleibt man sitzen.

Frage: Mit welcher Wahrscheinlichkeit steht die Spielfigur auf den jeweiligen Feldern?

Wir erinnern uns an ein paar Grundelemente aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eines Ereignisses A ergibt sich aus

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}.$$

Die Zahl 4 würfeln hat demnach die Wahrscheinlichkeit $P(4) = \frac{1}{6}$. Es gilt generell:



1 Eine $n \times n$ -Matrix hat maximal n EWe und maximal $r \leq n$ pwv EWe. In \mathbb{C} lässt sich das charakt. Polynom

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda E_n) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_r)^{l_r}$$

immer (Fundamentalsatz der Algebra) in n -Linearfaktoren zerlegen. Dabei sind die λ_1 bis λ_r pwv. In \mathbb{R} wissen wir nur, dass wir für ungerade n wenigstens einen reellen EW erhalten.

2 λ_1 bis λ_r seien also die pwv EWe von A , dann besitzt jeder EW λ_i das Attribut algeb. Vfh. l_i . Es gilt

$$r \leq \sum_{i=1}^r l_i = n \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{C} \quad \text{und} \quad r \leq \sum_{i=1}^r l_i \leq n \quad \text{für } \mathbb{K} = \mathbb{R}.$$

3 Jeder EW λ_i besitzt $1 \leq k_i \leq l_i$ (k_i = geom. Vfh.) lu EVen $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k_i}}$.

4 Es ist $U_{\lambda_i} = \text{Span}()$ der Eigenraum zum EW λ_i mit $\text{Dim } U_{\lambda_i} = k_i$. Es gilt

$$\sum_{i=1}^r k_i \leq \sum_{i=1}^r l_i \leq n \quad \wedge \quad \bigoplus_{i=1}^r U_{\lambda_i} = \begin{cases} \subsetneq \mathbb{K}^{n \times n} & \text{für } \sum k_i < n \\ = \mathbb{K}^{n \times n} & \text{für } \sum k_i = n \end{cases}.$$

Abbildung 5: Übersichtsdarstellung zu Eigenwerten, -vektoren und -räumen

- $P(A) = 0$: A trifft nie zu
- $P(A) = 1$: A trifft sicher zu
- $P(A) \in (0, 1)$: sonst

und

$P(A \vee B) = P(A) + P(B)$: A oder B trifft zu

Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit 3 oder 5 zu würfeln aus $P(3 \vee 5) = P(3) + P(5) = \frac{1}{3}$.
Mehr brauchen wir nicht. Zurück zum Spiel:

Wir überlegen uns die Wahrscheinlichkeiten, um vom Feld j auf das Feld i zu gelangen und tragen die Ergebnisse in ij -te Komponente der Matrix A ein:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{5}{6} \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Wir starten nun einmal mit einer Figur auf Feld 1. Es beinhalte der Vektor $x_0 \in \mathbb{R}^4$ die Wahrscheinlichkeiten, auf einer bestimmten Position zu stehen, dann ist

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

. Nach einem Wurf ergeben sich die neuen Wahrscheinlichkeiten zu

$$x_1 = Ax_0 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nach zwei Würfeln:

$$x_2 = Ax_1 = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich eine Folge x_3, x_4, \dots

$$\begin{pmatrix} 0.2037 \\ 0.1389 \\ 0.1667 \\ 0.4907 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1944 \\ 0.1188 \\ 0.1420 \\ 0.5448 \end{pmatrix}, \dots$$

Die entscheidende Frage ist jetzt, wie sich diese Wahrscheinlichkeiten im Laufe eines längeren Spieleabends entwickeln werden und ob das Ergebnis von der Startposition abhängig ist.

$$\begin{aligned}x_0 &= \text{Startwert} \\x_1 &= Ax_0 \\&\vdots \\x_k &= Ax_{k-1}\end{aligned}$$

Bei Konvergenz $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x$ gilt für diesen Grenzwert

$$x = Ax$$

Wenn die Matrix A einen EW 1 hat dann ist der Grenzwert dieser Folge gerade der EV zu diesem EW. Nicht wahr?

Das Matlab-Programm

```
A=[[1 1 2 1];[2 1 1 0];[2 2 1 0];[1 2 2 5]]/6;
[V,D]=eig(A);
[val i]=min(abs(diag(D)-1));
lambda = D(i,i);
Ev = V(:,i)/sum(V(:,i));
fprintf('Der EV zum EW lambda=%f lautet\nv=[%f %f %f %f]\n',lambda,Ev);
```

liefert das Ergebnis

```
Der EV zum EW lambda=1.000000 lautet
v=[0.185484 0.096774 0.112903 0.604839]
```

Das Ergebnis zeigt, dass man am häufigsten im Gefängnis sitzt, am wenigsten häufig auf Feld 2, dann relativ ausgeglichen auf 1 und 3. Könnte also ein eher langweiliger Spieleabend werden..... :-)

Satz & Definition 5.3 (spaltenstochastische Matrix). *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt spaltenstochastisch, falls gilt*

$$\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \quad \forall j$$

Für eine spaltenstochastische Matrix A und den EV v , beide mit nichtnegativen Komponenten, gilt

$$\|Av\|_1 = \|v\|_1.$$

Beweis Satz 5.3:

Für $v_i \geq 0$ ist $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n v_i$. Dann gilt für eine spaltenstochastische Matrix A

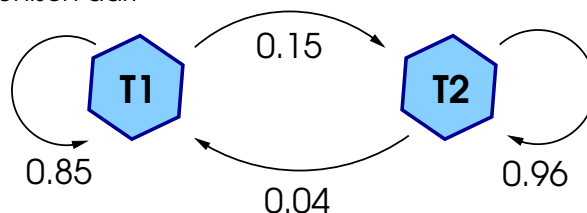
$$\|Av\|_1 = \sum_i \sum_j a_{ij} v_j = \sum_j \underbrace{\sum_i a_{ij}}_{=1} v_j = \|v\|_1.$$

□

Satz 5.3 besagt, dass EVen zum EW 1 nur positive oder negative Einträge haben können.

Beispiel 91 Versicherungspolice

Eine Kfz-Versicherung wird zu zwei Tarifgruppen angeboten. Der Anbieter beobachtet, dass im Laufe eines Jahres 15% der Versicherungsnehmer von Tarifgruppe 1 zu Tarifgruppe 2 wechseln. Bei der Tarifgruppe 2 wechseln 4% zur Tarifgruppe 1. Ein Übergangendiagramm stellt diese Zusammenhänge graphisch dar:



Die jährliche Änderung der Tarifgruppengröße wird durch die Matrix

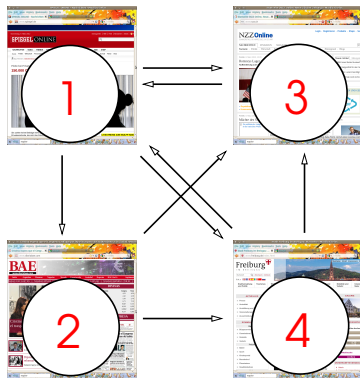
$$A = \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 \\ 0.15 & 0.96 \end{pmatrix}$$

dargestellt. Sie sehen, dass es sich um eine spaltenstochastische Matrix handelt. Ist auch klar, wenn man mal kurz drüber nachdenkt.

Die Versicherung ist nun daran interessiert, zu wissen, wohin sich die Anzahl der Versicherten der jeweiligen Tarifgruppen im Laufe der Zeit entwickelt. Die entsprechende Verteilung der Versicherungsnehmer können wir dem EV zum EW entnehmen:

$$v = \frac{\text{Anzahl Gesamtpersonen}}{19} \begin{pmatrix} 4 \\ 15 \end{pmatrix}$$

Beispiel 92 Googlematrix



Sie geben einen Suchbegriff ein, drücken die Eingabetaste und mit kindlicher Vorfreude studieren Sie die ersten Treffer aus einer Liste von Tausenden. Schier unermässlich scheint der Wille des Internets Ihnen Ihre Frage beantworten zu wollen. Schier unmöglich ist es hingegen, alle angebotenen Seiten nach der besten Information zu durchforsten. Die Suchmaschine hat bereits eine Vorsortierung für Sie vorgenommen. Nun weiss kein Computer, welche Seite für Ihre Bedürfnisse die beste Wahl ist, aber nach ganz speziellen Kriterien, und wir wollen hier von den erkaufte Plätzen in vor-

derster Reihe absehen, wurden bestimmte Seiten, die zu Ihrer Trefferliste gehören, als "wichtig" erklärt und nicht nur das sondern auch bezüglich einer Wichtigkeitsfunktion angeordnet. Wichtigste Seite zuerst, zweitwichtigste als zweite und so weiter.

Und was macht eine Seite nun wichtig? Wir könnten annehmen, dass eine Seite dann wichtig ist, wenn viele andere Seiten auf sie verweisen. Gehen wir einmal von einem äußerst einfachen Fall aus, nämlich, dass das Internet genau aus vier Seiten besteht und alle vier Seiten auch Ihren Suchbegriff enthalten. Diese vier Seiten seien untereinander verlinkt, so wie es im Bild links dargestellt ist. In dieser Situation wäre dann die Seite mit der Nummer 3 die wichtigste. Auf sie zeigen drei links. Die Seiten 1 und 4 kämen auf Position zwei mit jeweils zwei Zuweisungen und die Seite 2 wäre dann die unwichtigste Seite. Die Ergebnisliste sähe also so aus:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1, 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Wie auch immer mit der Rangfolge zwischen Seite 1 und 4 verfahren würde. Wir wollen folgende Überlegung anstellen: Es sollten nicht nur quantitative sondern auch qualitative Kriterien einfließen. Das heißt, dass es nicht nur auf die Anzahl der Zuweisungen ankommt sondern zusätzlich noch darauf ob diese Zuweisungen von wichtigen oder weniger wichtigen Seiten kommen. Was nutzen zehn Verweise von völlig nichtssagenden Seiten? Darauf sollte unmöglich die Wertschätzung einer Internetseite beruhen.

Die Idee ist folgende: Jede Seite erhält eine Stimme, die sie auf die Seiten auf die sie verweist gleichermaßen verteilt. Dazu sei W die Menge der Webseiten, die wir mit $w_i, i = 1, \dots, 4$ bezeichnen und

$$k_i := \text{Anzahl der Links, die von der Seite } w_i \text{ ausgehen}$$

In unserem Fall also

$$k_1 = 3, k_2 = 2, k_3 = 1, k_4 = 2.$$

Jede Seite w_i verteilt seine Stimme gleichmäßig zu Teilen $\frac{1}{k_i}$ an die Seiten, auf die sie verweist. Die Stimme ist um so gewichtiger, je wichtiger die Seite w_i ist. Dazu definieren wir die

sogenannte Wichtigkeitsfunktion (PageRankTM):

$$r : W \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$w_i \mapsto r_i$$

Jeder Stimmanteil der Seite w_i wird nun mit seiner Wichtigkeit gewichtet und an die entsprechend verlinkte Seite abgegeben. Unsere Seite 1 erhält dann die Wichtigkeit

$$r_1 = \frac{r_3}{k_3} + \frac{r_4}{k_4} = \frac{r_3}{1} + \frac{r_4}{2}$$

Seite 1 erhält von Seite 2 gar keine Stimme. Es gibt keinen Verweis von Seite 2 auf sie, so dass man annehmen kann, dass Seite 2 sie für absolut irrelevant hält. Von Seite 3 bekommt sie den vollen Stimmanteil. Seite 3 hält nur sie für erwähnenswert also besonders wichtig. Das ergibt einen hohen Stimmanteil, wenn Seite 3 selbst sehr wichtig ist, das heißt r_3 einen großen Wert enthält. Ansonsten eben nicht. Seite 4 hält sowohl Seite 1 als auch Seite 3 für erwähnenswert und verteilt ihre Stimmen damit zu gleichen Teilen. Auch hier fließt die Wichtigkeit der Seite 4 gewinnbringend für Seite 1 ein. Nach diesem Schema verfahren wir mit allen Seiten und erhalten insgesamt

$$r_1 = \frac{r_3}{1} + \frac{r_4}{2}$$

$$r_2 = \frac{r_1}{3}$$

$$r_3 = \frac{r_1}{3} + \frac{r_2}{2} + \frac{r_4}{2}$$

$$r_4 = \frac{r_1}{3} + \frac{r_2}{2}$$

Matrix-Vektor Schreibweise

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix}$$

Wir suchen also ein $r \in \mathbb{R}^n$ mit

$$r = A r,$$

das heißt wir suchen den EV zum EW 1, sofern es diesen gibt. Wir sehen direkt, dass es sich um eine spaltenstochastische Matrix handelt mit positiven Einträgen. Den EW 1 haben wir demnach sicher.

Damit ist klar, dass wir Vektoren r aus dem Kern der Abbildung $(A - E)x$ suchen. Für welche r gilt also

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = 0?$$

Elementare Zeilenumformungen führen auf

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Kern } \mathcal{A} = \left\{ r \in \mathbb{R}^4 \mid r = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} \lambda, \lambda \in \mathbb{R} \right\},$$

was uns direkt die Rangfolge der Internetseiten bezüglich ihrer Wichtigkeit liefert:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Mehr dazu in [Bryan und Leise \(2006\)](#) oder auch auf <http://www.rose-hulman.edu/bryan/google.html>.

Basiswechsel und Diagonalisierung von Matrizen

6

Wir behandeln:

- Isomorphismen
- Matrizen von linearen Abbildungen
- Darstellung zu verschiedenen Basen
- Ähnliche Matrizen in Diagonalgestalt

Wenn wir Rechnungen mit Matrizen durchführen wollen ist es sicher am bequemsten, wenn diese Diagonalgestalt hat. Leider ist das in der Praxis, insbesondere bei den spannenden Problemen, gerade nicht der Fall. Aber deshalb müssen wir den Kopf nicht hängen lassen. Es gibt für Matrizen das Attribut *Ähnlichkeit*, das heißt unter bestimmten Bedingungen sind zwei Matrizen einander ähnlich. Was das genau bedeutet klären wir in diesem Kapitel. Wenn nun eine Matrix zwar nicht diagonal ist, so besteht aber noch die Hoffnung, dass sie ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix. Dabei sei bemerkt, dass nicht jede Matrix diese Eigenschaft besitzt. Aber: Die Hoffnung stirbt zuletzt und das zu Recht.

Um die zugehörige, ähnliche Diagonalmatrix einer Matrix zu berechnen, müssen wir einen Basiswechsel vornehmen. Wie im Eingang des Kapitels auf Seite 93 bereits erwähnt können wir von Matrizen, genau wie bei den Vektoren im \mathbb{K}^n eine Art Koordinatenmatrix errechnen, was wir aber so nicht nennen werden. Man spricht dann von der Darstellung der Matrix bezüglich bestimmter Basen. Im Unterschied zu den Vektoren haben wir es nun mit Basen zweier Vektorräume zu tun. Bei der Berechnung eines Koordinatenvektors im \mathbb{R}^3 berücksichtigten wir nur die Basis, die für den \mathbb{R}^3 gewählt wurde. Bei einer 4×2 -Matrix haben wir es dann mit einer Basis im \mathbb{R}^4 und einer im \mathbb{R}^2 zu tun. Wir werden in Folge dessen den Matrizenbegriff noch einmal neu definieren, im Grunde erst jetzt wirklich vollständig. Wir werden sehen, dass wir durch einen geeigneten Basiswechsel, das heißt wir stellen die nicht diagonale Matrix bezüglich geeigneter Basen dar, eine ähnliche Matrix in Diagonalgestalt erhalten, sofern es diese gibt. Bei der Wahl einer geeigneten Basis werden dann die EVen wieder in's Spiel kommen.

6.1 Isomorphismen und Koordinatendarstellung

Was wir nun behandeln ist ein sehr abstraktes Thema, das sich nicht mehr so einfach durch Ebenen, Geraden oder sonstige graphische Darstellungsmöglichkeiten veranschaulichen lässt. Wir tun unser Bestes und verwenden das sogenannte kommutative Diagramm als eine Möglichkeit, sich von den Geschehnissen ein Bild machen zu können.

Definition 6.1 (kommutatives Diagramm). *Ein kommutatives Diagramm stellt dar, dass*

verschiedene Verkettungen von Abbildungen das gleiche Ergebnis liefern.

Beispiel 93 Ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{f} & W \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 A & \xrightarrow{g} & B
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 f = q^{-1} \circ g \circ p \\
 p = g^{-1} \circ q \circ f \\
 g = q \circ f \circ p^{-1} \\
 q = g \circ p \circ f^{-1}
 \end{array}$$



In einem kommutativen Diagramm ist es also egal welchen Weg man geht. Damit man alle Wege vor- und rückwärts "begehen" kann müssen die beteiligten Abbildungen Isomorphismen (bijektiv) sein.

Es seien ab jetzt immer V, W VRe über \mathbb{K} , $\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{W} = (w_1, \dots, w_n)$ eine Basis von W . Ferner sei $f \in \text{Hom}(V, W)$.

Definition 6.2 (isomorphe Vektorräume). Zwei VRe V und W heißen isomorph, wenn es einen Isomorphismus $f: V \xrightarrow{\cong} W$ gibt.

Wir schreiben dann

$$V \cong W$$

Satz 6.3. Es gilt:

$$V \cong W \quad \Rightarrow \quad \text{Dim } V = \text{Dim } W$$

Beweis Satz 6.3:

Es seien V, W VRe mit $\text{Dim } V = n$ und $f \in \text{Hom}(V, W)$ ein Isomorphismus, dann gilt

- f ist surjektiv, das heißt es ist $W = \text{Span}(f(v_1), \dots, f(v_n))$ also ist $f(v_1), \dots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem vom Wertebereich W .
- f ist injektiv, also gilt nach der Dimensionsformel $\text{Dim Bild } f = \text{Dim } V = n$ und da $W = \text{Bild } f$ ist, ist auch $\text{Dim } W = n$ und somit $\text{Dim } V = \text{Dim } W$.

□

Satz 6.4.

$$\text{Dim } V = n \quad \Rightarrow \quad V \cong \mathbb{K}^n$$

Beweis Satz 6.4:

Für eine Basis v_1, \dots, v_n von V und einen beliebigen Vektor $v \in V$ gilt

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(v_1, \dots, v_n)}_{\in \mathbb{K}^{n \times n}, \text{ regulär}} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = v$$

$$\Rightarrow \alpha_1, \dots, \alpha_n \text{ sind eind. bestimmt}$$

Die Abbildung $\Phi : V \rightarrow \mathbb{K}^n$ mit

$$\Phi(v) = (v_1, \dots, v_n)^{-1} v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

ist

- injektiv, da die Matrix (v_1, \dots, v_n) regulär ist und
- surjektiv, da es sonst ein Vektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ gäbe mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \notin V$. Das kann nicht sein, da V ja ein VR ist und alle Linearkombinationen der Basisvektoren wieder in V enthalten sind.

Somit ist Φ ein Isomorphismus, was bedeutet, dass

$$V \cong \mathbb{K}^n$$

erfüllt ist. □

Beispiel 94 $\mathbb{P}_2 \cong \mathbb{R}^3$

Es ist $\mathcal{V} = \{1, x, x^2\}$ eine Basis von \mathbb{P}_2 und

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in \mathbb{P}_2.$$

Es ist dann

$$\Phi_{\mathcal{V}}(p) = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Die Basis von \mathbb{P}_2 wird auf eine Basis von \mathbb{R}^3 abgebildet, wie wir leicht einsehen können, denn es gilt:

$$\Phi(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi(x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt:

$$\Phi_V : \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$$

Beispiel 95 $\mathbb{P}_2 \cong \mathbb{R}^3$ mit verschiedenen Basen

Es seien zwei Basen

$$\mathcal{P} = \{1, x, x^2, x^3\} \quad \text{und} \quad \mathcal{S} = \{10, 2x, -8x^2, 3x^3\}$$

des \mathbb{P}_3 und ein Polynom

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 4x + 5 \in \mathbb{P}_3$$

gegeben.

Es sind dann die Abbildungen $\Phi_{\mathcal{P}}$ und $\Phi_{\mathcal{S}}$ mit

$$\Phi_{\mathcal{P}}(p) = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi_{\mathcal{S}}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -2 \\ -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Isomorphismen.

Folgerung 6.5.

$$\dim V = \dim W \quad \Rightarrow \quad V \cong W$$

Beweis Folgerung 6.5:

Diese Behauptung ergibt sich aus Satz 6.3 und Satz 6.4: Wenn $\dim V = n$ und $\dim W = n$ ist, so gibt es isomorphe Abbildungen

$$\Phi : V \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n \quad \text{und} \quad \Psi : W \xrightarrow{\cong} \mathbb{K}^n.$$

Es ist dann die Verkettung der isomorphen Abbildungen Φ und Ψ^{-1} , nämlich $\Psi^{-1} \circ \Phi : V \xrightarrow{\cong} W$ wieder ein Isomorphismus und infolgedessen gilt

$$V \cong W.$$

□



In Worten formuliert besagen die Sätze 6.3, 6.4 und Folgerung 6.5, dass wir zwischen n -dimensionalen Vektorräumen immer eine bijektive Abbildung, genauer Isomorphismen, finden können. Aus dem Beweis von Satz 6.4 wissen wir sogar, dass die Zuordnung zwischen Vektor und Koordinatenvektor ein Isomorphismus darstellt.

6.2 Matrizen von linearen Abbildungen

Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_{\mathcal{V}} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \Psi_{\mathcal{W}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{\mathcal{A}=?} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Die Abbildung \mathcal{A} können wir ersetzen durch

$$\mathcal{A} = \Psi_{\mathcal{W}} \circ f \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{-1}.$$

Wenn es sich bei f um einen Homomorphismus handelt, also $f \in \text{Hom}(V, W)$ gilt, so lässt sich die Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ in Matrix-Vektorform

$$\mathcal{A}(x) = Ax, \quad A \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

darstellen. Die Gestalt der Matrix A hängt von der Abbildung f und der Wahl der Basen \mathcal{V} und \mathcal{W} ab. Deshalb muss man eigentlich bei der Angabe einer Matrix diese Komponenten noch erwähnen. Das ist neu und deshalb definieren wir das, um es ein für alle Mal festzuhalten:

Definition 6.6 (Matrix einer Abbildung). *Es seien V, W VRe mit $\text{Dim } V = n, \text{Dim } W = m$ und Basen \mathcal{V} und \mathcal{W} .*

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_{\mathcal{V}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{W}} \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathcal{A} = Ax} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Die $(m \times n)$ -Matrix $A = (a_{ij})_{ij}$ heißt Matrix der linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$ bezüglich der Basen \mathcal{V} und \mathcal{W} .



Zu einem gegebenen Homomorphismus, also einer linearen Abbildung, können wir immer eine Matrix angeben, wobei dann eben Basen \mathcal{V} und \mathcal{W} angegeben sein müssen.

Im Folgenden werden wir uns der Fragestellung widmen, wie wir eine solche Matrix berechnen können.

Satz 6.7 (Berechnung des Bildvektors). *Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ und $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die Matrix zu f bezüglich der Basen $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V und $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W und $a \in V$ mit*

$$a = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i.$$

Der Bildvektor $b = f(a)$ ist dann gegeben durch

$$b = \sum_{j=1}^m \beta_j w_j \quad \text{mit} \quad \beta = A \alpha .$$

Beweis Satz 6.7:

Übersichtsbild mit Einzelzusammenhängen dargestellt mit ESK⁶.

$$\begin{array}{ccc}
 a \in V & \xrightarrow{f} & W \ni b & & f(a) = b \\
 \Phi_V \downarrow & & \downarrow \Phi_W & & \Phi_V(a) = \alpha & a = \alpha_i v_i \\
 \alpha \in \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \ni \beta & & A \alpha = \beta & \\
 & & & & \Phi_W(b) = \beta & b = \beta_i w_i
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 f(a) &= f\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j v_j\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \underbrace{f(v_j)}_{\in W} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \\
 &= \sum_{i=1}^m \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_j}_{\in \mathbb{K}^m} w_i = \sum_{i=1}^m (A \alpha)_i w_i = \sum_{i=1}^m \beta_i w_i = b
 \end{aligned}$$

Das dritte Gleichheitszeichen beinhaltet die Behauptung des Satzes. Es ist ja klar, dass $f(v_j) \in W$ gilt und es deshalb $a_{ji} \in \mathbb{K}$ gibt mit $f(v_j) = a_{ji} w_i$ aber erst im Gesamtkontext wird klar, dass die Koeffizienten a_{ji} auch die Koeffizienten der gesuchten Matrix A sind.

□

Beispiel 96

Es sei die Abbildung $f \in \text{Hom}(\mathbb{P}_3, \mathbb{P}_3)$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{P}_3 &\rightarrow \mathbb{P}_3 \\
 p(x) &\mapsto x \cdot p'(x)
 \end{aligned}$$

und $\mathcal{B} = \{1, x - 1, (x - 1)^2, (x - 1)^3\} = \{b_0, b_1, b_2, b_3\}$ von \mathbb{P}_3 gegeben. Gesucht ist die Matrix $A_{\mathcal{B}}$ zur Abbildung f bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Einerseits gilt (siehe Beweis 6.7):

⁶Die Einsteinsche Summenkonvention (ESK) ist eine Konvention, die 1916 von Albert Einstein eingeführt wurde. Mit ihr werden die Summenzeichen zur Verbesserung der Übersicht einfach weggelassen und stattdessen wird über doppelt auftretende Indizes summiert.

$$\begin{aligned}
 f(v_j) &= \sum_{i=0}^3 a_{ij} v_i = \sum_{i=0}^3 a_{ij} (x-1)^i \\
 &= a_{0j} + a_{1j} (x-1) + a_{2j} (x-1)^2 + a_{3j} (x-1)^3 \\
 &= (a_{0j} - a_{1j} + a_{2j} - a_{3j}) \\
 &\quad + (a_{1j} - 2a_{2j} + 3a_{3j}) x \\
 &\quad + (a_{2j} - 3a_{3j}) x^2 \\
 &\quad + (a_{3j}) x^3
 \end{aligned} \tag{5}$$

Andererseits gilt:

$$f(v_j) = x \cdot \frac{d}{dx} (x-1)^j = x \cdot j \cdot (x-1)^{j-1} = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ x & \text{für } j = 1 \\ 2x^2 - 2x & \text{für } j = 2 \\ 3x^3 - 6x^2 + 3x & \text{für } j = 3 \end{cases} \tag{6}$$

Der Koeffizientenvergleich für die Darstellungen von $f(v_j)$ in (5) und (6) ergibt:

$j = 0$:

$$\begin{aligned}
 a_{00} - a_{10} + a_{20} - a_{30} &= 0 \\
 a_{10} - 2a_{20} + 3a_{30} &= 0 \\
 a_{20} - 3a_{30} &= 0 \\
 a_{30} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{i0} = 0 \quad \forall i$$

$j = 1$

$$\begin{aligned}
 a_{01} - a_{11} + a_{21} - a_{31} &= 0 \\
 a_{11} - 2a_{21} + 3a_{31} &= 1 \\
 a_{21} - 3a_{31} &= 0 \\
 a_{31} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{01} = a_{11} = 1 \text{ alle anderen Koeffizienten verschwinden.}$$

$j = 2$

$$\begin{aligned}
 a_{02} - a_{12} + a_{22} - a_{32} &= 0 \\
 a_{12} - 2a_{22} + 3a_{32} &= -2 \\
 a_{22} - 3a_{32} &= 2 \\
 a_{32} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_{12} = a_{22} = 2 \text{ alle anderen Koeffizienten verschwinden.}$$

$$j = 3$$

$$\begin{aligned} a_{03} - a_{13} + a_{23} - a_{33} &= 0 \\ a_{13} - 2a_{23} + 3a_{33} &= 3 \\ a_{23} - 3a_{33} &= -6 \\ a_{33} &= 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow a_{23} = a_{33} = 3$ alle anderen Koeffizienten verschwinden.

Damit erhalten wir insgesamt die Matrix

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Äh, ja und was kann man jetzt damit machen? Ganz einfach. Wenn wir zu einem Polynom den Koordinatenvektor in \mathbb{K}^4 kennen, so können wir seine Ableitung mit x multipliziert berechnen, ohne die Ableitung selbst tatsächlich berechnen zu müssen. (Das ist nicht der Punkt auf den wir hinaus wollen, aber jetzt mal so 'ne Zwischenerkenntnis.)

Wir probieren das mal aus am Polynom $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 2$. Einerseits ist

$$f(p) = x \cdot \frac{d}{dx} p(x) = 3x^3 - 12x^2 + 11x$$

und andererseits gilt:

$$p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 2 = 4 + 2(x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$$

und demnach

$$\Phi_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir multiplizieren diesen Koordinatenvektor mit der berechneten Matrix $A_{\mathcal{B}}$ und erhalten

$$b = A_{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Diesen Koordinatenvektor zur Linearkombination mit den Basisvektoren aus \mathcal{B} verwenden liefert

$$2 - 4(x-1) - 3(x-1)^2 + 3(x-1)^3 = 3x^3 - 12x^2 + 11x = x \cdot p'(x)$$

Bingo!

Saalaufgabe 97

Berechnen Sie die Matrix aus Beispiel 96 neu aber diesmal bezüglich der Basis

$$\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3\}.$$

Einerseits gilt:

$$f(v_j) = a_{0j} + a_{1j}x + a_{2j}x^2 + a_{3j}x^3$$

Und andererseits gilt:

$$f(v_j) = x \cdot \frac{d}{dx}x^j = jx^j = \begin{cases} 0 & \text{für } j = 0 \\ x & \text{für } j = 1 \\ 2x^2 & \text{für } j = 2 \\ 3x^3 & \text{für } j = 3 \end{cases}$$

Koeffizientenvergleich liefert die Matrix $A_{\mathcal{C}}$:

$$A_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Ein kleiner Test soll uns davon überzeugen, dass wir uns nicht verrechnet haben: Wir nehmen wieder das Polynom von oben $p(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 2$. Es gilt:

$$\Phi_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diesen Koordinatenvektor multiplizieren wir mit $A_{\mathcal{C}}$:

$$A_{\mathcal{C}} \Phi_{\mathcal{C}}(p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix} =: \beta$$

Dann ist

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i v_i = 11x - 12x^2 + 3x^3.$$

Voilà!

Beispiel 98

Wir kombinieren Beispiel 96 und Saalaufgabe 97, indem wir nun die Matrix zur Abbildung $f : p \mapsto x \cdot p'$ bezüglich der Basen \mathcal{B} und \mathcal{C} berechnen.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}_3 \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{\mathcal{A} = Ax} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Es ist (jetzt etwas kompakter aufgeschrieben)

$$\begin{aligned} f(b_0) = 0 &= a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3 \Rightarrow a_{j0} = 0 && \forall j \\ f(b_1) = x &= a_{01} + a_{11}x + a_{21}x^2 + a_{31}x^3 \Rightarrow a_{11} = 1 && \text{sont Null} \\ f(b_2) = 2x^2 - 2x &= a_{02} + a_{12}x + a_{22}x^2 + a_{32}x^3 \Rightarrow a_{12} = -2, a_{22} = 2 && \text{sont Null} \\ f(b_3) = 3x^3 - 6x^2 &= a_{03} + a_{13}x + a_{23}x^2 + a_{33}x^3 \Rightarrow a_{23} = -2, a_{33} = 3 && \text{sont Null} \\ &= +3x && \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich insgesamt die Gesuchte Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Wir testen das wieder an unserem Beispiel: $p(x) = 4 + 2(x-1) - 3(x-1)^2 + (x-1)^3$. Es ist

$$\alpha = \Phi_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\alpha = \beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 11 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

und damit dann

$$q(x) = \Phi_{\mathcal{C}}^{-1}(\beta) = 11x - 12x^2 + 3x^3 = x \cdot p'(x).$$

✓

Siehe Step-by-Step Anleitung auf Seite 157.

6.3 Basiswechsel und Diagonalisierung

Es könnte ja nun sein, dass zu einem $f \in \text{Hom}(V, W)$ eine Matrix bezüglich vorgegebener Basen \mathcal{V} und \mathcal{W} schon gegeben ist. Wie finden wir die Matrix zur gleichen Abbildung aber bezüglich anderer Basen $\tilde{\mathcal{V}}$ und $\tilde{\mathcal{W}}$, ohne den gleichen Rechenprozess zu wiederholen? Wir werden dazu in beiden Vektorräumen einen Basiswechsel durchführen. Der Basiswechsel ist selbst eine lineare Abbildung und wird ebenfalls durch eine Matrix beschrieben.

Wir betrachten folgendes Beispiel, bei dem wir Koordinatendarstellungen bezüglich einer Basis umrechnen wollen auf die Koordinatendarstellung einer anderen Basis:

Beispiel 99

Wir betrachten den VR \mathbb{P}_3 , versehen mit den Basen

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= \{1, x, x^2, x^3\} \\ \tilde{\mathcal{B}} &= \{1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3\}.\end{aligned}$$

Wir wollen nun die Matrix T des Basiswechsels von der Basis \mathcal{B} in die Basis $\tilde{\mathcal{B}}$ aufstellen. Man definiert diese Matrix des Basiswechsels als die Matrix der Identitätsabbildung: $\text{Id} : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_3, p(x) \mapsto p(x)$ bezüglich der Basen \mathcal{B} und $\tilde{\mathcal{B}}$. Das zugehörige kommutative Diagramm hat folgende Darstellung:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_3 & \xrightarrow{\text{Id}} & \mathbb{P}_3 \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{R}^4 & \xrightarrow{T} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

Und wir rechnen wie gehabt

$$\begin{aligned}\text{Id}(1) &= 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2 + 0 \cdot (x-1)^3 \\ \text{Id}(x) &= x &= 1 \cdot 1 + 1 \cdot (x-1) + 0 \cdot (x-1)^2 + 0 \cdot (x-1)^3 \\ \text{Id}(x^2) &= x^2 &= 1 \cdot 1 + 2 \cdot (x-1) + 1 \cdot (x-1)^2 + 0 \cdot (x-1)^3 \\ \text{Id}(x^3) &= x^3 &= 1 \cdot 1 + 3 \cdot (x-1) + 3 \cdot (x-1)^2 + 1 \cdot (x-1)^3\end{aligned}$$

und erhalten die Matrix T des Basiswechsels

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Spalten dieser Matrix enthält die Koordinaten der alten Basisvektoren bezüglich der neuen Basisvektoren. Selbstverständlich muss die Matrix T regulär sein, denn der Basiswechsel sollte in beide Richtungen funktionieren. Die Inverse erhalten wir dann also durch

$$\begin{array}{rcllcl}
\text{Id}(1) = 1 & = 1 \cdot 1 & + 0 \cdot x & + 0 \cdot x^2 & + 0 \cdot x^3 \\
\text{Id}(x-1) = x-1 & = -1 \cdot 1 & + 1 \cdot x & + 0 \cdot x^2 & + 0 \cdot x^3 \\
\text{Id}((x-1)^2) = (x-1)^2 & = 1 \cdot 1 & + (-2) \cdot x & + 1 \cdot x^2 & + 0 \cdot x^3 \\
\text{Id}((x-1)^3) = (x-1)^3 & = -1 \cdot 1 & + 3 \cdot x & + (-3) \cdot x^2 & + 1 \cdot x^3
\end{array}$$

also

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir machen den Test:

$$\begin{array}{rcl}
p(x) = x^3 - 10x + 5 & \text{in } \mathbb{P}_3 \\
\alpha = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{Koord. in } \mathbb{R}^4 \text{ bzgl. der Basis } \mathcal{B} \\
\beta = T\alpha = \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \text{Koord. in } \mathbb{R}^4 \text{ bzgl. der Basis } \tilde{\mathcal{B}}
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 \beta_i \tilde{b}_i &= -4 - 7(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 \\
&= x^3 - 10x + 5 = p(x)
\end{aligned}$$

Definition 6.8 (Matrix des Basiswechsels). Sei V ein VR mit den Basen $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}_1, \dots, \tilde{b}_n\}$. Die Matrix $T = (t_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$, definiert durch

$$b_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} \tilde{b}_i$$

heißt Matrix des Basiswechsels.

Satz 6.9. Es gelten die Voraussetzungen wie in Definition 6.8. Für $v \in V$ gelte

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i \quad \text{und} \quad v = \sum_{i=1}^n \tilde{\alpha}_i \tilde{b}_i.$$

Dann gilt

$$\tilde{\alpha} = T\alpha.$$

Beweis Satz 6.9:

Am kommutativen Diagramm ablesen

□



Der Basiswechsel ist im Grunde ein Spezialfall: Wir berechnen die Matrix zur Identitätsabbildung bezüglich der alten und der neuen Basen. Wenden wir also die Matrix T auf den Koordinatenvektor der alten Basis an, so erhalten wir die Koordinaten des selben Vektors zur neuen Basis als Resultat.

Übersicht:

Matrix einer Abbildung f bzgl. der Basen \mathcal{B} und $\tilde{\mathcal{B}}$ in V : Basiswechsel zwischen den Basen \mathcal{B} und $\tilde{\mathcal{B}}$ in V :

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{K}^m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\text{Id}} & V \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\tilde{\mathcal{B}}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{T} & \mathbb{K}^n \end{array}$$

Für jedes dieser beiden Diagramme rechnen wir ein Beispiel durch. Zunächst (Beispiel 100) berechnen wir die Matrix A einer Abbildung f bezüglich der Basen \mathcal{V} und \mathcal{W} und dann (Beispiel 101) führen wir einen Basiswechsel durch von \mathcal{V} nach $\tilde{\mathcal{V}}$ und von \mathcal{W} nach $\tilde{\mathcal{W}}$.

Beispiel 100 Matrix-Darstellung

Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit $V = W = \mathbb{R}^2$ und

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ der Abbildung f bezüglich der Basen

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ von } V \text{ und } \mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ von } W.$$

Erste Spalte von A :

$$\begin{aligned} f(v_1) = f(1, 1) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zweite Spalte von A :

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

⇒

$$A = \begin{pmatrix} 4 & \frac{3}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel 101 Basiswechsel

Für die Matrix aus Beispiel 100 wollen wir nun einen Basiswechsel \mathcal{V} nach $\tilde{\mathcal{V}}$ und von \mathcal{W} nach $\tilde{\mathcal{W}}$ durchführen, wobei die neuen Basen wie folgt gegeben sind:

$$\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathcal{W}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\mathcal{V} \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}$:

$$\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

⇒

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{W} \rightarrow \tilde{\mathcal{W}}$:

$$\begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

⇒

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

⇒

$$\tilde{A} = S A T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{15}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

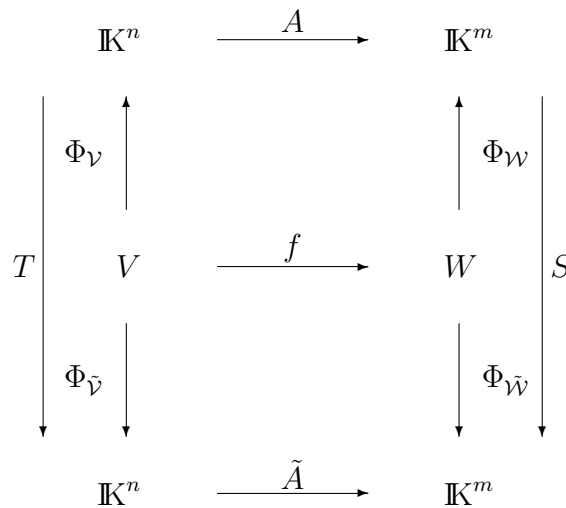
Satz 6.10 (Basiswechsel). Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ und $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ die Matrix der Abbildung f bezüglich der Basen $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$. Dann ist die Matrix \tilde{A} von f bezüglich der Basen $\tilde{\mathcal{V}} = \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ und $\tilde{\mathcal{W}} = \{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_m\}$ gegeben durch

$$\tilde{A} = S A T^{-1},$$

wobei $T \in \mathbb{K}^{n \times n}$ die Matrix des Basiswechsels von \mathcal{V} nach $\tilde{\mathcal{V}}$ und $S \in \mathbb{K}^{m \times m}$ die Matrix des Basiswechsels von \mathcal{W} nach $\tilde{\mathcal{W}}$ ist.

Beweis Satz 6.10:

Am kommutativen Diagramm kann man sich den Sachverhalt "anschaulich" klar machen:



□

Siehe Step-by-Step Anleitung auf Seite 159.

Bei einem Endomorphismus $f \in \text{Hom}(V, V)$ haben wir es unter Umständen nur mit einer Basis \mathcal{V} zu tun. Wir erhalten beim Basiswechsel der Matrix A für f bezüglich der Basis \mathcal{V} zur Basis $\tilde{\mathcal{V}}$ nur eine Transformationsmatrix, denn es ist dann $S = T$ und die neue Matrix \tilde{A} bezüglich $\tilde{\mathcal{V}}$ genügt dann der Gleichung

$$\tilde{A} = T A T^{-1}.$$

Matrizen A und \tilde{A} mit einer solchen Beziehung zueinander erhalten einen besonderen Namen:

Definition 6.11 (Ähnlichkeit von Matrizen). Zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen *ähnlich*, wenn es ein reguläres $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit

$$B = SAS^{-1}.$$

Matrizen eines Endomorphismus $f \in \text{Hom}(V, V)$ bezüglich unterschiedlicher Basen sind demnach ähnlich.

Beispiel 102

Es sei $f \in \text{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$$

und die Basis $\mathcal{V} = \{v_1, v_2\}$ vom \mathbb{R}^2 gegeben mit

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Wir berechnen die zugehörige Matrix A .

Es ist

$$f(v_1) = f(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad f(v_2) = f(-1, 2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (7)$$

und damit erhalten wir für die zwei Spalten der Matrix

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dass die resultierende Matrix Diagonalgestalt besitzt ist kein Zufall. Sehen sie sich die Zeile (7) nochmals genauer an. Die gewählte Basis \mathcal{V} besteht gerade aus den EVen von f zu den EWen $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Das sind dann auch gerade die Werte auf der Diagonalen der Matrix A .

Wir können also mit EVen einer Abbildung als Basis die darstellende Matrix in Diagonalgestalt erhalten. Das geht allerdings nicht mit jeder Matrix.

Satz 6.12 (Diagonalisieren von Matrizen). *Ist $\dim V = n$, $f \in \text{Hom}(V, V)$ und A die Matrix von f bezüglich der Basis \mathcal{V} von V dann ist Folgendes äquivalent:*

1. *Es gibt eine aus Eigenvektoren von f bestehende Basis von V .*
2. *Es gibt eine Basis \mathcal{V} von V , so dass A eine Diagonalmatrix ist.*

Beweis Satz 6.12:

Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine quadratische Matrix mit n nicht zwingend pww EWen $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ und zugehörigen EVen v_1, \dots, v_n . Die zugehörigen Eigenräume spannen also den ganzen \mathbb{K}^n auf. Dann gilt doch Folgendes:

$$\begin{aligned}
 & A v_i = \lambda_i v_i && \forall i \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i^1 \\ \vdots \\ v_i^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i v_i^1 \\ \vdots \\ \lambda_i v_i^n \end{pmatrix} && \forall i \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ v_1^n & v_2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^1 & \lambda_2 v_2^1 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_1 v_1^n & \lambda_2 v_2^n \end{pmatrix} \\
 & \vdots \\
 \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1^1 & \cdots & v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ v_1^n & \cdots & v_n^n \end{pmatrix}}_{=:T^{-1}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^1 & \cdots & \lambda_n v_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 v_1^n & \cdots & \lambda_n v_n^n \end{pmatrix} \\
 \Leftrightarrow & A T^{-1} = T^{-1} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}}_{=:D_\lambda} \\
 \Leftrightarrow & T A T^{-1} = D_\lambda
 \end{aligned}$$

□



Der Satz besagt in Worten formuliert: Wenn die Eigenvektoren eine Basis von V bilden, was sie tun, wenn die Summe der Eigenräume gleich V ist, dann ist die Matrix von f bezüglich dieser Basis eine Diagonalmatrix. Und dann gilt auch noch die Umkehrung. Wenn es eine Basis gibt, zu der die Matrix A diagonal ist, so sind die Elemente dieser Basis Eigenvektoren von f .

Definition 6.13 (diagonalisierbar). Ein Endomorphismus $f \in \text{Hom}(V, V)$ heißt diagonalisierbar, wenn eine der beiden Bedingungen in Satz 6.12 erfüllt sind.

Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt diagonalisierbar, wenn der durch sie beschriebene Endomorphismus

$$\mathcal{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$$

diagonalisierbar ist.

Beispiel 103 Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

hat die EWe $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -5$ und die zugehörigen EVen

$$v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich die Ähnlichkeit

$$\underbrace{\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}}_{=T^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}_{=T} = \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}}_{=D_\lambda}$$

Beispiel 104 Nicht diagonalisierbar ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Sie hat den EW $\lambda = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und zugehörigem Eigenraum

$$U_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^2 \mid v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Die geometrische Vielfachheit ist demnach 1. Es kann nicht der ganze \mathbb{R}^2 durch EVen als Basis aufgespannt werden.

Siehe Step-by-Step Anleitung auf Seite 161.

6.4 Anwendungsbeispiel zur Diagonalisierung

6.4.1 Was ist eigentlich "e hoch Matrix"?

Wir kennen ja schon gut die Exponentialfunktion in ihrer Reihendarstellung

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Die e-Funktion ist eine skalare Funktion mit $e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Frage, die wir uns nun stellen wollen ist: Gibt es die e-Funktion auch als Abbildung zwischen den VRen $\mathbb{R}^{n \times n}$, also $e : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$? Kurzum stellt sich uns doch die Frage, ob wir für quadratische Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einen sinnvollen Ausdruck für

$$e^M$$

definieren können, wobei es sich dann wieder um eine quadratische $n \times n$ -Matrix handeln sollte. Wir starten mal genauso wie im \mathbb{R} . Es ist ja $e^0 = 1$ also das neutrale Element bzgl. der Multiplikation im \mathbb{R} . Dann definieren wir jetzt $e^0 = E_n$, d.h. e hoch Nullmatrix ist gleich dem neutralen Element bzgl. der Multiplikation im $\mathbb{R}^{n \times n}$. Alles Weitere definieren wir über die Potenzreihe (MLAE2)

$$e^M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^k}{k!}, \quad M \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Dabei tauchen Potenzen von Matrizen, was wieder Matrizen sind und Summen von Matrizen auf, was darauf führt, dass "e hoch Matrix" wieder eine Matrix ist. Damit ist auch der Wertebereich sauber erklärt. Schwierig wird es, wenn wir die Komponenten der resultierenden Matrix

$$(e^M)_{ij}$$

konkret angeben wollen, da sich in der Darstellung eine unendliche Reihe verbirgt.

Wir machen uns das Leben zunächst einfach und betrachten nur einfach gestrickte Matrizen, nämlich Diagonalmatrizen. Es sei $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix.

Satz 6.14. Für Diagonalmatrizen $D \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt:

$$e^D = e \begin{pmatrix} d_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_{nn}} \end{pmatrix}$$

Beweis Satz 6.14:

Als ersten Ansatz verwenden wir die Potenzreihendarstellung der e-Funktion, angewandt auf eine Diagonalmatrix:

$$e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

Da fragen wir uns zunächst was eigentlich die k-te Potenz einer Diagonalmatrix ist:

Mit

$$D_{ik} = d_{ik}\delta_{ik} = \begin{cases} d_{ii} & \text{für } k = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt

$$(D^2)_{ij} = \sum_{k=1}^n d_{ik}d_{kj}\delta_{ik}\delta_{kj} = d_{ii}d_{ij}\delta_{ij} = \begin{cases} d_{ii}^2 & \text{für } j = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und führt sukzessive auf

$$D^k = \begin{pmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^k \end{pmatrix}.$$

Die k -te Potenz einer Diagonalmatrix besteht also aus den k -ten Potenzen ihrer Diagonalelemente und bleibt vor allem eine Diagonalmatrix.

Damit gilt für die Potenzreihe der e-Funktion:

$$\begin{aligned} e^D &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \begin{pmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_{nn}^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{11}^k}{k!} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_{nn}^k}{k!} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{d_{11}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{d_{nn}} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Beispiel 105

$$e \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{e^3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Wenn nun die Matrix in der e-Funktion keine Diagonalgestalt hat aber ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix, d.h. diagonalisierbar ist können wir die Situation retten. Das besagt der folgende

Satz 6.15. *Es sei $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit*

$$M = T^{-1} D T,$$

wobei T die Transformationsmatrix und D die ähnliche Diagonalmatrix ist. Dann gilt

$$e^M = T^{-1} e^D T.$$

Beweis Satz 6.15:

Mit

$$\begin{aligned} (T^{-1} D T)^k &= \underbrace{(T^{-1} D T) \cdot (T^{-1} D T) \cdots (T^{-1} D T) \cdot (T^{-1} D T)}_{k \text{ mal}} \\ &= T^{-1} \underbrace{D \cdot D \cdots D \cdot D}_{k \text{ mal}} T = T^{-1} D^k T \end{aligned}$$

gilt

$$e^M = e^{T^{-1} D T} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(T^{-1} D T)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^{-1} D^k T}{k} = T^{-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k} \right) T = T^{-1} e^D T$$

□

Beispiel 106

Mit

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{9}$$

(siehe Beispiel 103) gilt

$$e^{\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^{-5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \frac{1}{9} = \begin{pmatrix} 7e^4 + 2e^{-5} & 7e^4 - 7e^{-5} \\ 2e^4 - 2e^{-5} & 2e^4 + 7e^{-5} \end{pmatrix}$$

Wir lassen diese kleine Vorarbeit für einen Moment ruhen, betrachten zunächst eine völlig andere Sache und greifen die eben gewonnenen Erkenntnisse später im Kapitel 6.4.4 wieder auf.

6.4.2 Eine kleine ODE

Wir betrachten eine einfache ODE⁷, nämlich, die, die natürliches Wachstum beschreibt. Wir gehen dabei von der biblischen Situation⁸ aus, dass die Änderungsrate $h'(t)$ eines Bestands

⁷ODE=Ordinary Differential Equation zu deutsch Gewöhnliche Differentialgleichung, kurz DGL; wird für gewöhnlich in der MAE3 ausführlich behandelt

⁸“Denn wer da hat, dem wird gegeben, daß er die Fülle habe; wer da nicht hat, von dem wird auch genommen, was er hat.” (Matthäus-Evangelium, Kapitel 13, Vers 12)

proportional zum Bestand $h(t)$ selbst ist mit einem Proportionalitätsfaktor, der hier den Namen α erhalten soll. Die homogene, lineare DGL erster Ordnung (höchste Ableitung) mit konstanten Koeffizienten ($\alpha \neq \alpha(t)$) lautet:

$$\begin{aligned} h'(t) &= \alpha h(t) \\ h(0) &= h_0 \end{aligned} \quad (8)$$

Dabei beschreibt $h(t)$ die Größe des Bestands zum Zeitpunkt t und h_0 die Größe des Bestands zu Beginn der Messung. Die Frage ist nun, wie sieht die Funktion $h(t)$ konkret aus, die genau in diese Gleichungen hineinpasst.

Satz 6.16. Die Gleichung (8) hat die eindeutige Lösung

$$h(t) = h_0 e^{\alpha t}.$$

Beweis Satz 6.16:

1. Die angegebene Funktion ist eine Lösung, denn

$$h'(t) = \frac{d}{dt} h_0 e^{\alpha t} = \alpha h_0 e^{\alpha t} = \alpha h(t).$$

2. Die Lösung ist eindeutig: Angenommen es gäbe zwei Lösungen $h_1(t)$ und $h_2(t)$ mit

$$\begin{aligned} h_1'(t) &= \alpha h_1(t) & \text{und} & & h_2'(t) &= \alpha h_2(t) \\ h_1(0) &= h_0 & & & h_2(0) &= h_0. \end{aligned}$$

Dann gilt für die Differenz $h(t) := h_1(t) - h_2(t)$

$$\begin{aligned} h'(t) &= \alpha h(t) \\ h(0) &= 0, \end{aligned}$$

woraus folgt, dass $h(t) = \alpha h_0 e^{\alpha t} = \alpha 0 e^{\alpha t} = 0$ ist. Das ist klar, wenn man bedenkt, dass von nix ja auch nix kommen kann. Damit gilt dann aber auch $h_1(t) - h_2(t) = 0$, bzw. $h_1(t) = h_2(t)$.

□

Beispiel 107

Wir betrachten einen Bestand Hasen, der durch die Funktion $h(t)$ beschrieben wird, wobei t die zeitliche Angabe in Jahren beschreibt. $h(2.5)$ gibt dann die Anzahl vorhandener Hasen nach 2,5 Jahren an. Zu Beginn der Beobachtung, also $t = 0$ gebe es zwei Hasen. Es ist demnach

$$h(0) = h_0 = 2,$$

und zwar handele es sich dabei um ein männliches und ein weibliches Exemplar. Unsere Tiere vermehren sich derart, dass sich der Bestand pro Jahr verdoppelt. Je ein Hasenpaar zeugt also pro Jahr wieder je ein männliches und ein weibliches Tier. Der Verlauf sieht dann so aus:

$$h(0) = 2 \qquad h(1) = 4 \qquad t(2) = 8 \qquad \text{etc.}$$

Es lässt sich die Funktion h schreiben als

$$h(t) = 2^{1+t} = 2 \cdot 2^t = h_0 2^t = h_0 e^{t \ln 2}.$$

In diesem Fall wäre

$$h_0 = 2 \quad \text{und} \quad \alpha = \ln 2.$$

6.4.3 Ein kleines System ODEs

Nun stören wir das friedliche Miteinander der Hasen und siedeln Füchse im Gehege an. Der Bestand der Füchse werde durch die Funktion $f(t)$ beschrieben. Sagen wir die Hasen vermehren sich zwar, werden aber von Füchsen gefressen, das bedeutet, dass der Fuchsbestand einen negativen Einfluss auf die Änderungsrate des Hasenbestands hat:

$$h'(t) = \alpha h(t) - \beta f(t) \tag{9}$$

Implizit stecke in dieser Gleichung bereits die Sterberate der Hasen mit drin. Die Füchse hingegen vermehren sich nur, wenn genug Futter da ist, so dass das Verhalten ihrer Änderungsrate vom Hasenbestand abhängt. Zudem sterben Füchse auch, je mehr da sind desto mehr sterben, was dann mit einem negativen Vorzeichen zu Buche⁹ schlägt. Sagen wir die Gleichungen verhalten sich so:

$$f'(t) = \gamma h(t) - \delta f(t) \tag{10}$$

Die Gleichungen (9) und (10) hängen voneinander ab. Um $h(t)$ zu berechnen, müssen wir wissen was $f(t)$ ist und umgekehrt. Wir sprechen hier also von einem gekoppelten System Gewöhnlicher Differentialgleichungen oder ODEs; linear, erster Ordnung, homogen mit konstanten Koeffizienten um genau zu sein. Wir müssen sie zusammen "anpacken" und fassen sie dafür zusammen in der Form

$$\begin{pmatrix} h'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} h(0) \\ f(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_0 \\ f_0 \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Ableitungen von vektorwertigen Funktionen wirken auf die einzelnen Komponenten. Mit

$$\begin{pmatrix} h'(t) \\ f'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(t) \\ f(t) \end{pmatrix}'$$

und

$$u := \begin{pmatrix} h(t) \\ f(t) \end{pmatrix}, \quad M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

⁹Herkunft: Früher waren Bücher, weil sie so wertvoll waren, mit Riegeln verschlossen, die mit der Hand aufgeschlagen werden mussten. Daher stammt auch der Ausdruck ein Buch aufschlagen. (Quelle: <http://de.wiktionary.org>)

lässt sich Gleichung (11) auch als

$$\begin{aligned}u'(t) &= M y(t) \\ u(0) &= u_0\end{aligned}$$

darstellen. Es hat sich inhaltlich ja nichts verändert. Wir haben den Komponenten der Gleichung nur andere Namen gegeben. Wenn wir den Lösungsansatz im skalaren Fall aus Satz 6.16 einfach mal auch im vektorwertigen Fall anwenden so erhalten wir

$$u(t) = e^{Mt} u_0.$$

Für unsere einzelnen Bestände gilt dann

$$\begin{aligned}h(t) &= (e^{Mt})_{11} h_0 + (e^{Mt})_{12} f_0 \\ f(t) &= (e^{Mt})_{21} h_0 + (e^{Mt})_{22} f_0\end{aligned}$$

Die Matrizenkomponenten $(e^{Mt})_{ij}$ können wir nun mit den Mitteln aus Kapitel 6.4.1 konkret beschreiben. Wir machen das im nächsten Kapitel anhand konkreter Zahlenbeispiele für M .

6.4.4 Füchse fressen Hasen

<p>A: Hasen vermehren sich. Füchse sterben.</p> $\begin{aligned}h' &= h, & h(0) &= 10 \\ f' &= -f, & f(0) &= 50\end{aligned}$	<p>B: Füchsen fressen Hasen.</p> $\begin{aligned}h' &= h - \frac{1}{3}f, & h(0) &= 10 \\ f' &= -f, & f(0) &= 50\end{aligned}$
<p>C: Füchse gedeihen, wenn sie viel zu fressen haben. Der Hasenbestand bleibe dadurch unberührt (nicht ganz realistisch der Ansatz)</p> $\begin{aligned}h' &= h, & h(0) &= 10 \\ f' &= h - f, & f(0) &= 50\end{aligned}$	<p>D: Hasen vermehren sich einerseits und werden andererseits von Füchsen gefressen. Füchse sterben einerseits, gedeihen aber andererseits ganz gut wenn genug Futter da ist.</p> $\begin{aligned}h' &= h - \frac{1}{10}f, & h(0) &= 10 \\ f' &= h - f, & f(0) &= 50\end{aligned}$

Für jeden dieser Fälle berechnen wir die EWe und EVen der Matrix M aus der Lösung

$$\begin{pmatrix} h(t) \\ f(t) \end{pmatrix} = e^{Mt} \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix} = T^{-1} e^{Dt} T \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \end{pmatrix},$$

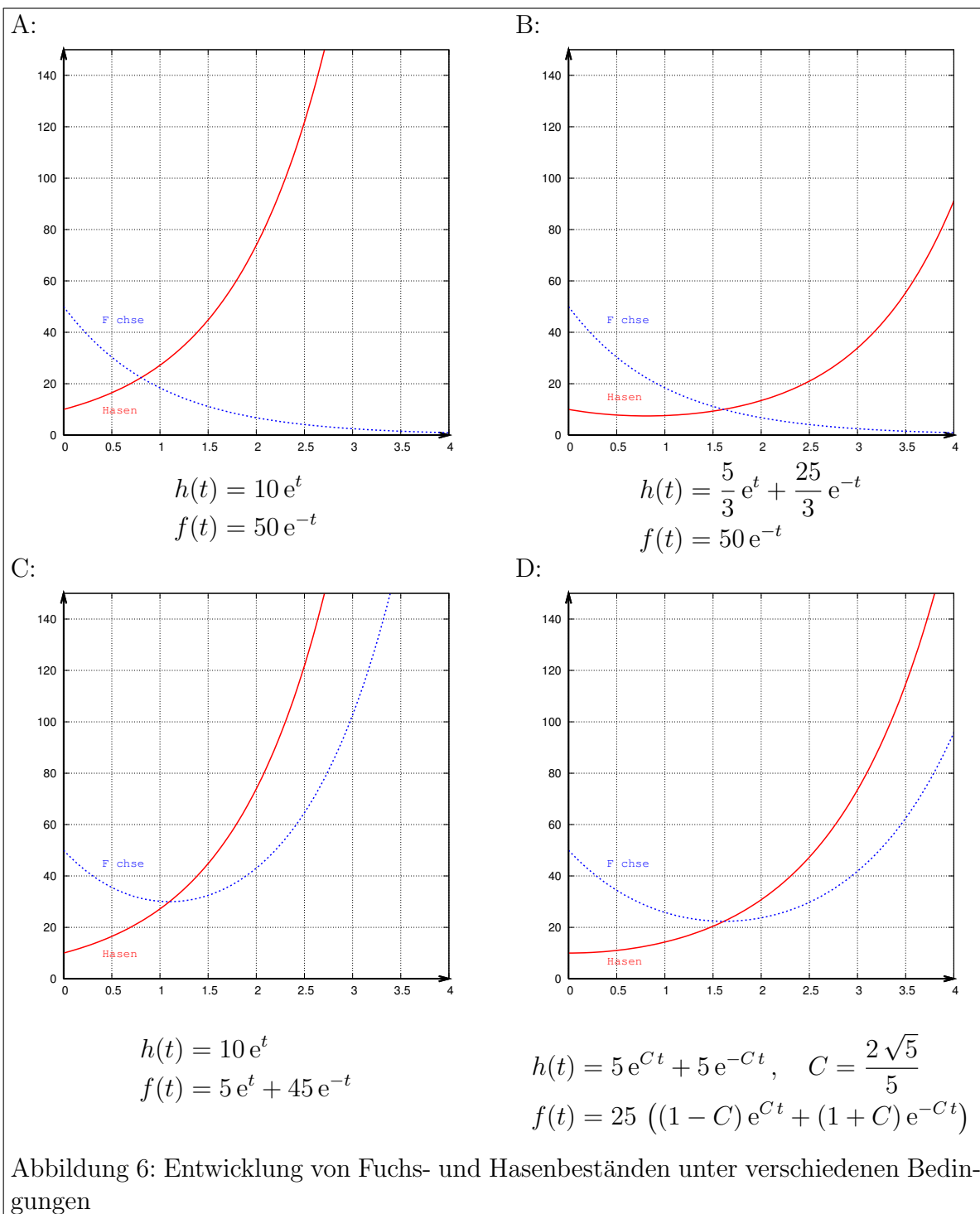
falls M nicht bereits Diagonalgestalt besitzt.

<p>A:</p> $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	<p>B:</p> $M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
$h(t) = 10e^t$ $f(t) = 50e^{-t}$	$h(t) = \frac{5}{3}e^t + \frac{25}{3}e^{-t}$ $f(t) = 50e^{-t}$
<p>C:</p> $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$	<p>D:</p> $M = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{10} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
$h(t) = 10e^t$ $f(t) = 5e^t + 45e^{-t}$	$h(t) = 5e^{Ct} + 5e^{-Ct}, \quad C = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $f(t) = 25((1-C)e^{Ct} + (1+C)e^{-Ct})$

Die Ergebnisse der Fälle A bis D sind in Abbildung 6 dargestellt. Weitere Situationen lassen sich bequem mit einem kleinen Matlab-Programm simulieren:

HasenUndFuechse.m

```
syms t
% Zeitspanne
Tmax=4;
% Startwerte
u0=[10; 50];
% Matrix des ODE-Systems
M=[[1 -1/3];[0 -1]];
% Diagonalisierung
% Eigenwerte und Eigenvektoren
[Ti D]=eig(M);
% Transformationsmatrix
T=inv(Ti);
% aehnliche Diagonalmatrix von M
ED(t)=diag(diag(exp(D*t)));
% Loesung des Systems
u(t) = Ti*ED(t)*T*u0;
uf = formula(u);
% Loesung fuer Hasen und Fuechse separiert als Funktionen
h(t)=uf(1); f(t)=uf(2);
% formatierte Ausgabe der Loesungen
fprintf('Hasenbestand: h(t)=%s\n',char(h(t)));
fprintf('Fuchsbestand: f(t)=%s\n',char(f(t)));
% Zeitfenster fuer plot
tt=0:0.1:Tmax;
ht=h(tt); ft=f(tt);
plot(tt,ht,'r-',tt,ft,'b-'); grid on;
title('Bestand von Hasen (rot) und Füchsen (blau)');
xlabel('Zeit in Jahren'); ylabel('Bestand');
print('HasenUndFuechse.eps', '-depsc');
```



6.4.5 Die Liebe von Romeo und Julia

In diesem Unterkapitel wollen wir uns mit der Dynamik des Liebesverhältnisses zwischen Romeo und Julia befassen. Dabei bezeichnen wir mit $R(t)$ die Liebe, die Romeo gegenüber

Julia empfindet, und mit $J(t)$ die Liebe, die Julia zu Romeo hegt. Die Zeit t messen wir in Tagen. Aufmerksame Beobachter haben folgende Entwicklung festgehalten:

Von Anfang an (also ab $t = 0$) liebt Romeo seine Julia sehr:

$$R(0) = 4$$

Allerdings ist Julia dem Romeo anfangs eher neutral eingestellt:

$$J(0) = 0$$

Auch in der Entwicklung ihrer Liebe zueinander unterscheiden sie sich vom Typ her. Für Romeo ist die Sache ganz einfach: Je mehr Julia ihn liebt, desto mehr liebt er auch sie (und natürlich umgekehrt: je weniger Julia ihn liebt, desto weniger liebt er sie). Präziser:

$$R'(t) = \frac{4}{5} J(t)$$

Julias Gefühle lassen sich jedoch nicht so einfach beschreiben: Ihre Liebe zu Romeo lässt sofort nach, wenn Romeo beginnt, sie mehr zu lieben. Falls sich jedoch Romeos Gefühle abkühlen, dann fängt sie sofort an, ihn mehr zu lieben. Und zu guter Letzt wächst ihre Liebe zu ihm, je mehr sie ihn liebt. Präziser:

$$J'(t) = \frac{1}{5} R(t) + \frac{2}{5} J(t).$$

Schon ganz erschöpft von dem ganzen Durcheinander, stellt sich Julia ein Ultimatum: Wenn Romeo sie am 50-ten Tag nicht liebt (d.h. falls $J(50) \leq 0$), trennt sie sich von ihm. Anderenfalls will sie mit ihm bis ans Ende ihrer Tage zusammen sein. Bleiben Romeo und Julia zusammen?

Spannend!

Wir betrachten die gekoppelten Gleichungen als System

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix}$$

mit dem Lösungsansatz

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} t} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Suchen wir nun für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

die ähnliche Diagonalmatrix. Als EWe erhalten wir die Nullstellen des charakteristischen Polynoms

$$p(\lambda) = \frac{1}{25} \det \begin{pmatrix} -5\lambda & 4 \\ -1 & 2 - 5\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \frac{2}{5}\lambda + \frac{8}{5}$$

$$p(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{5} \left(1 \pm \sqrt{3}i \right)$$

Aha! Wir haben es hier also mit komplexen EWen zu tun. Das macht nichts. Wir rechnen damit weiter. Wichtig an der Stelle ist nur, dass wir damit die Diagonalisierbarkeit der Matrix gewährleistet haben. Wir rechnen damit genauso weiter wie gewohnt und erhalten dann unter Umständen eben auch komplexe EVen. Aber auch das muss uns nicht weiter stören. Es ist

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 + \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

der EV zum EW $\lambda_1 = \frac{1}{5} (1 + \sqrt{3}i)$ und

$$v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix}$$

der EV zum EW $\lambda_2 = \frac{1}{5} (1 - \sqrt{3}i)$. Damit erhalten wir die Transformationsmatrix T und ihre Inverse T^{-1} wie immer

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 + \sqrt{3}i & 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} \frac{i+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}i \\ \frac{-i+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}i \end{pmatrix},$$

was uns die Lösung des Gesamtsystems liefert:

$$\begin{pmatrix} R(t) \\ J(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 + \sqrt{3}i & 1 - \sqrt{3}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{1}{5}(1+\sqrt{3}i)t} & 0 \\ 0 & e^{\frac{1}{5}(1-\sqrt{3}i)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{i+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}}i \\ \frac{-i+\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bzw. "en detail" liebt Romeo am Tage t die Julia gemäß

$$R(t) = 2 \left(e^{\frac{t}{5}(\sqrt{3}i+1)} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}i + 1 \right) - e^{\frac{-t}{5}(\sqrt{3}i-1)} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}i - 1 \right) \right)$$

und die Julia den Romeo am Tage t folgendermaßen:

$$J(t) = \frac{2}{\sqrt{3}}i \left(e^{\frac{t}{5}(\sqrt{3}i+1)} - e^{\frac{-t}{5}(\sqrt{3}i-1)} \right)$$

Die Berechnungen dazu sind ein wenig mühsam. Wir überprüfen deshalb mit Matlab, ob das soweit stimmt:

RomeoUndJulia.m

```

syms t
% Startwerte
RJ0 = [4; 0];
% Zeitspanne
Tmax = 21;
% Matrix des ODE-Systems
A=[[0 4/5];[-1/5 2/5]];
% Diagonalisierung
% Eigenwerte und Eigenvektoren
[Ti D]=eig(A);
% Transformationsmatrix
T = inv(Ti);
% aehnliche Diagonalmatrix
ED(t) = diag(diag(exp(D*t)));
% Loesung des Systems
RJ(t) = Ti*ED(t)*T*RJ0;
RJf = formula(RJ);
% Loesung fuer Romeo und Julia separiert als Funktionen
R(t) = RJf(1);
J(t) = RJf(2);
% formatierte Ausgabe der Loesungen
fprintf('Romeos Liebe: R(t)=%s\n',char(R(t)));
fprintf('Julias Liebe: J(t)=%s\n',char(J(t)));
% Zeitfenster fuer plot
tt=0:0.1:Tmax;
Romeo=R(tt); Julia=J(tt);
plot(tt,Romeo,'b-',tt,Julia,'r-');
xlabel('t in Tagen');
title('Die Liebe von Romeo (blau) und Julia (rot)');
print('RomeoUndJulia.eps', '-depsc');

```

Eine graphische Darstellung für die ersten drei Wochen ($t = 21$) und nach 50 Tagen ($t = 50$) der Lösungskurve ist in Abbildung 7 dargestellt. Wir sehen einen oszillierenden Verlauf der Kurven. Beim Fuchs-Hase-Beispiel war das nicht so. Das liegt an den komplexen EWeN, die im Exponenten der e-Funktion stehen. Eine komplexe Zahl in der Potenz ist schon ganz schön starker Tobak! Wir wollen das zum willkommenen Anlass nehmen, uns den Komplexen Zahlen noch einmal zuzuwenden. Dort werden wir dann einmal besser verstehen, warum es zu diesem Schwingungsverhalten in der Lösungskurve kommt.

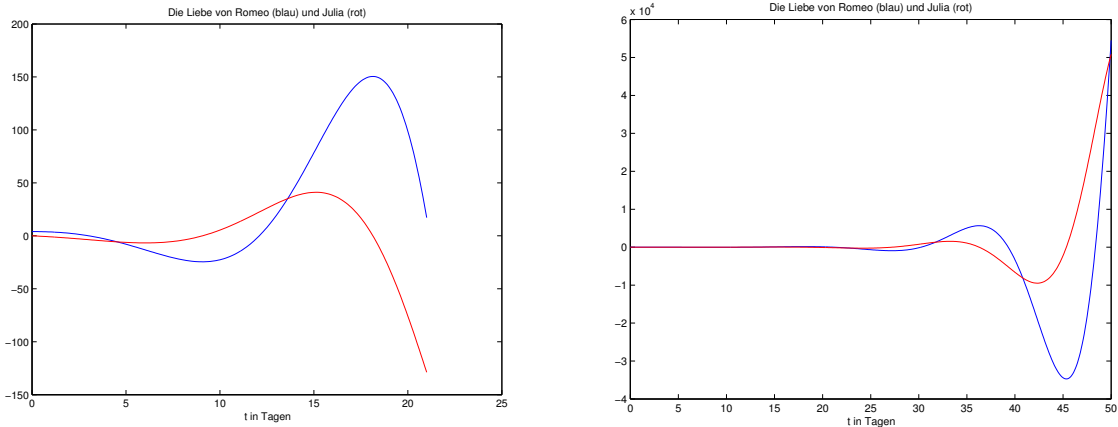


Abbildung 7: Verlauf der jeweiligen Zuneigungen von Romeo und Julia

Komplexe Zahlen Teil II

7

Wir behandeln:

- Wir berechnen Potenzen von komplexen Zahlen und klären Ausdrücke wie i^i
- Wir drehen uns ganz oft im Kreis und ziehen die Wurzel
- Wir lernen den schönsten Satz der Mathematik kennen

7.1 Grundlagen

Die Grundlagen der komplexen Zahlen, also die Menge als Körper mit Addition und Multiplikation und auch Subtraktion und Division haben wir bereits in Kapitel 1.2 kennengelernt. Wir hatten sogar über die Polarform von komplexen Zahlen gesprochen. Hier zunächst noch einmal die grundlegenden Rechenregeln zur Wiederholung im Überblick:

Rechenregeln für komplexe Zahlen: Es seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $z = a + ib$ und $w = c + id$.

Addition/Subtraktion:

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

Die komplexe Addition/Subtraktion entspricht der Vektoraddition/-subtraktion im \mathbb{R}^2 .

Multiplikation:

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + da)$$

Das konjugiert Komplexe:

$$\bar{z} = a - ib$$

In der Gaußschen Zahlenebene ist \bar{z} die Spiegelung von z an der x -Achse.

Betrag:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Der Betrag einer komplexen Zahl entspricht dem Abstand zum Ursprung in der Gaußschen Zahlenebene.

Division:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i \frac{bc - da}{c^2 + d^2}$$

Polarform: (Definition 1.18)

$$z = |z| (\cos \operatorname{Arg}(z) + i \sin \operatorname{Arg}(z)), \quad \operatorname{Arg}(z) = \operatorname{atan2} \frac{b}{a}$$

7.2 Potenz und Wurzel von komplexen Zahlen und der schönste Satz der Mathematik

Das Bonbon kommt immer zum Schluss und hier ist sie, die schönste Formel der Mathematik¹⁰:

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \quad (12)$$

Dahinter stecken im wesentlichen die sogenannten Eulergleichungen:

Satz 7.1 (Eulergleichung). Für $r, \varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$r e^{i\varphi} = r (\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Beweis Satz 7.1:

Die Eulergleichungen erhält man über die Potenzreihendarstellungen von \sin , \cos und e (MAE2/MNEU):

$$\begin{aligned} \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ \cos x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos x + i \sin x &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i^2)^k}{(2k)!} x^{2k} + i \frac{(i^2)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = e^{ix} \end{aligned}$$

□



Geometrisch interpretiert handelt es sich bei der Menge

$$\{e^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$$

um die Bahnkurve auf dem Kreisrand mit Radius 1.

¹⁰“Vor einigen Jahren gab es eine Umfrage unter Mathematikern: Welche Formel ist die schönste? Zur Auswahl standen Beispiele aus verschiedenen Bereichen der Mathematik. Am Ende siegte eine Formel aus dem 18. Jahrhundert, die auf den Mathematiker Euler zurückgeht. Er war damals Mathematiker am Hofe Friedrichs des Großen in Berlin.” (Quelle: www.welt.de, 2004)

Mit Satz 7.1 lässt sich dann die Beziehung (12) direkt einsehen, denn es ist ja

$$r e^{i\varphi} = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

und mit $r = 1$ und $\varphi = \pi$ gilt

$$\begin{aligned} 1 e^{i\pi} &= 1 (\cos \pi + i \sin \pi) \\ \Leftrightarrow e^{i\pi} &= -1 + i \cdot 0 \\ \Leftrightarrow e^{i\pi} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

□

Insgesamt haben wir jetzt drei Darstellungsmöglichkeiten von komplexen Zahlen kennengelernt; hier nochmal im Überblick:

Darstellungsmöglichkeiten von komplexen Zahlen: Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z = a + i b$. Dann gilt:

$z = a + i b$	kartesische Form
$z = z (\cos \operatorname{Arg}(z) + i \sin \operatorname{Arg}(z))$	Polarform
$z = z e^{i \operatorname{Arg}(z)}$	Exponentialform

Beispiel 108

Für $z = 2 - 3 i$ gilt

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\ \operatorname{Arg}(z) &= \arctan \frac{3}{2} \approx 0.98 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Polarform (näherungsweise!)

$$z = \sqrt{13} (\cos 0.98 + i \sin 0.98)$$

und die Exponentialform (auch näherungsweise)

$$z = \sqrt{13} e^{0.98 i}$$

Der unschlagbare Vorteil der Exponentialform ist die leichte Handhabbarkeit bei der Berechnung von Potenzen. Lassen Sie sich überraschen mit dem folgenden

Satz 7.2 (Potenz von komplexen Zahlen). *Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit*

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Dann gilt

$$z^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Beweis :

klar

□



Die n -te Potenz einer komplexen Zahl in Exponentialform ergibt sich aus der n -ten Potenz des Betrages und das n -fache des Argumentes.

Beispiel 109

$$(2 - 3i)^3 = \left(\sqrt{13} e^{0.98i}\right)^3 = \sqrt{13}^3 e^{2.95i}$$

Im Gegensatz zur e -Funktion im Reellen ist die e -Funktion im Komplexen eine periodische Funktion, weil sich die Periodizität der Sinus- und Kosinusfunktion überträgt:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi = \cos(\varphi + 2\pi k) + i \sin(\varphi + 2\pi k) = e^{i(\varphi + 2\pi k)} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}$$

Beispiel 110

$$(2 - 3i)^3 = \sqrt{13}^3 e^{2.95i} = \sqrt{13}^3 e^{9.23i} = \sqrt{13}^3 e^{15.52i} = \dots \text{etc.}$$

Definition 7.3 (Wurzel einer komplexen Zahl). *Für eine komplexe Zahl $a \in \mathbb{C}$ und eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ heißt jede Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung*

$$z^n = a$$

n -te Wurzel von a .



Wir sagen nicht z sei die n -te Wurzel von a , also $a^{\frac{1}{n}}$ sondern z sind alle Lösungen der Gleichung $z^n = a$. Der Unterschied besteht streng genommen darin, dass es nicht **die** n -te Wurzel gibt, sondern immer eine ganze, im Grunde "unendlich große" Lösungsmenge vorhanden ist.

Satz 7.4 (Wurzel einer komplexen Zahl). *Jede Zahl*

$$z_k = \sqrt[n]{|z|} e^{i\left(\frac{\text{Arg}(z)}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)}$$

ist n -te Wurzel von $z \in \mathbb{C}$.

Für $z \neq 0$ und $n \in \mathbb{N}$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau n verschiedene Lösungen.

Beweis :

Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $a = \alpha e^{i\psi}$, so muss für die Polardarstellung $z = r e^{i\varphi}$ jeder n -ten Wurzel z von a

$$r^n = \alpha \quad \text{und} \quad n\varphi = \psi + 2\pi k$$

mit einem $k \in \mathbb{Z}$ gelten. Also ist

$$r = \sqrt[n]{\alpha} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{\psi}{n} + \frac{2\pi k}{n}.$$

Jede Lösung der Gleichung $z^n = a$ hat daher die Form

$$z_k = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{k}{n}2\pi\right)}$$

mit $\alpha = |a|$ und $k \in \mathbb{Z}$.

Unter diesen unendlich vielen Zahlen sind nur z_0, z_1, \dots, z_{n-1} voneinander verschieden, denn es ist

$$\begin{aligned} z_n &= \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{n}{n}2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + 2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n}\right)} = z_0 \\ z_{n+1} &= \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{n+1}{n}2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{n}{n}2\pi + \frac{1}{n}2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{1}{n}2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n}\right)} = z_1 \\ z_{n+2} &= \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{n+2}{n}2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{n}{n}2\pi + \frac{2}{n}2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n} + \frac{2}{n}2\pi\right)} = \sqrt[n]{\alpha} e^{i\left(\frac{\psi}{n}\right)} = z_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

□

Beispiel 111

Wir suchen alle Lösungen von

$$z^3 = -i$$

. Für $a = -i$ gilt $|a| = 1$ und $\text{Arg}(a) = \frac{3}{2}\pi$. Dann ist a in der Exponentialform gegeben als

$$a = e^{\frac{3}{2}\pi i}.$$

Die k -ten Wurzeln für $k = 0, 1, 2$ ergeben sich zu

$$z_k = e^{i\left(\frac{1}{2}\pi + \frac{2}{3}\pi k\right)}.$$

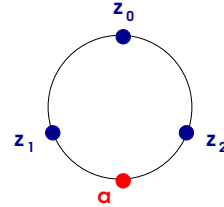
Im Einzelnen haben wir

$$z_0 = e^{i(\frac{1}{2}\pi)}$$

$$z_1 = e^{i(\frac{7}{6}\pi)}$$

$$z_2 = e^{i(\frac{11}{6}\pi)}$$

$$z_3 = e^{i(\frac{15}{6}\pi)} = e^{i(2\pi + \frac{1}{2}\pi)} = e^{i\frac{1}{2}\pi} = z_0$$



a und z liegen hier nur deshalb auf dem selben Kreisrand, weil der Radius 1 ist!



Wurzelziehen ist Potenzieren mit einem Bruch.

Die Lösungen von $z^n = a$ bilden in der komplexen Zahlenebene die Ecken eines regelmäßigen n -Ecks auf dem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{|a|}$.

Beispiel 112

(i) Wir lösen die Gleichung

$$z^2 = 4.$$

Es ist $a = 4 + i \cdot 0 = 4e^{i \cdot 0}$ und wir erhalten damit die Lösungen

$$z_0 = \sqrt[2]{4} e^{i \cdot \frac{0}{2}} = 2$$

und

$$z_1 = \sqrt[2]{4} e^{i \cdot (\frac{0}{2} + \frac{2\pi}{2} \cdot 1)} = 2(\cos \pi + i \cdot \sin \pi) = 2(-1 + i \cdot 0) = -2,$$

was nun nicht gerade überraschend ist. Es ist aber dennoch schön zu sehen, dass unser Wissen aus dem Reellen auch hier noch Gültigkeit hat.

(ii) Für die Lösungen der Gleichung

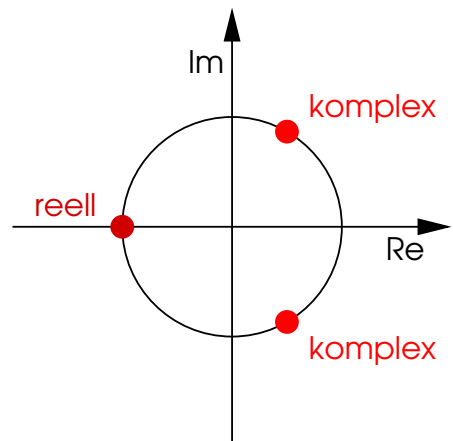
$$z^3 = -1$$

gilt mit $-1 = e^{i\pi}$

$$z_0 = e^{i \cdot \frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = e^{i \cdot (\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3})} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0$$

$$z_2 = e^{i \cdot (\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3})} = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Wir sehen, dass diese Gleichung drei Lösungen hat, klar, denn es ist ja nach den dritten Wurzeln gefragt, aber nur eine davon ist wieder eine reelle Zahl.



Im Komplexen gibt es immer n verschiedene n -te Wurzeln. Im Reellen ist das nicht im Allgemeinen so. Die Anzahl der Wurzeln hängt davon ab wieviele Wurzeln auf der Realteil-Achse im Koordinatensystem liegen. Es gibt dann nur drei Möglichkeiten: keine Wurzel (Bsp: $\sqrt{-1}$), eine Lösung (Bsp: $\sqrt[3]{-1}$) oder zwei Lösungen (Bsp: $\sqrt{4}$).

7.3 Logarithmus von komplexen Zahlen

Was uns nun noch fehlt, ist die Berechnung von Potenzen von komplexen Zahlen und zwar der Fall, dass der Exponent eben auch eine komplexe Zahl ist. Also was ist für $a, b \in \mathbb{C}$ der Ausdruck

$$a^b ?$$

Satz 7.5. *Es gilt*

$$\ln z = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z).$$

Beweis :

$$\ln z = \ln (|z|e^{i \operatorname{Arg}(z)}) = \ln |z| + \ln (e^{i \operatorname{Arg}(z)}) = \ln |z| + i \operatorname{Arg}(z)$$

□

Damit können wir dann jeden Ausdruck der Form a^b für $a, b \in \mathbb{C}$ berechnen, nämlich so:

$$\begin{aligned} a^b &= e^{\ln(a^b)} = e^{b \ln a} = e^{b(\ln |a| + i \operatorname{Arg}(a))} = e^{b \ln |a|} e^{b i \operatorname{Arg}(a)} \\ &= |a|^b (\cos(b \operatorname{Arg}(a)) + i \sin(b \operatorname{Arg}(a))). \end{aligned}$$

Beispiel 113

$$i^i = e^{\ln(i^i)} = e^{i \ln i} = e^{i(\ln |i| + i \operatorname{Arg}(i))} = e^{i(\ln 1 + i \frac{\pi}{2})} = e^{i^2 \frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.2078795764$$

i^i ist also eine reelle Zahl. Nun sagen Sie nicht, dass das nicht ein witziges Ergebnis ist....!

Saalaufgabe 114

Berechnen Sie

$$(-2 + i)^{(3-i)}.$$

Es ist

$$|-2 + i| = \sqrt{5} \approx 2.2361, \quad \ln |-2 + i| \approx 0.80473 \quad \text{und} \quad \operatorname{atan2}(1, -2) \approx 2.6779$$

und damit folgt

$$\begin{aligned}
 (-2 + i)^{(3-i)} &= e^{(3-i) \ln(-2+i)} = e^{(3-i) (\ln|-2+i| + i \operatorname{Arg}(-2+i))} \\
 &= e^{3 \ln|-2+i| + \operatorname{Arg}(-2+i)} e^{i (3 \operatorname{Arg}(-2+i) - \ln|-2+i|)} \approx e^{5.0921} e^{i 7.2290} \\
 &\approx 162.73 (\cos 7.2290 + i \sin 7.2290) \approx 95.210 + i 131.97
 \end{aligned}$$

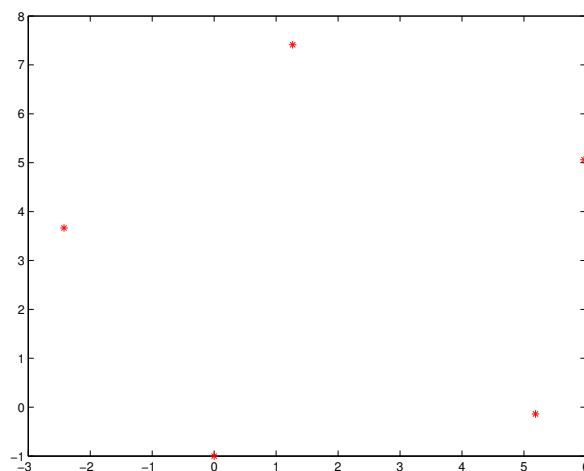
Zusammengefasst:

$$(-2 + i)^{(3-i)} \approx 95.210 + i 131.97$$

Saalaufgabe 115

Schreiben Sie ein Matlabprogramm, das die Ecken eines gleichseitigen Vielecks im \mathbb{R}^2 berechnet. Als Eingabewerte sind der Mittelpunkt M , eine Ecke E_0 und die Anzahl der gesuchten Ecken Num des Vielecks gegeben. Als Ausgabe erhalten Sie alle weiteren Ecken E_1 bis E_{Num} und eine graphische Darstellung.

Ergebnisbild:



nEck.m

```

% Mittelpunkt des n-Ecks
M = [2 3];
% Anzahl gesuchter Ecken
Num = 5;
% Erste Ecke in kartesischen Koordinaten
K(1,:)=[0 -1];
% Translation des Mittelpunkts auf den Ursprung
K(1,:) = K(1,)-M;
% K_1 in Exponentialform
Bet = sqrt(K(1,1)^2+K(1,2)^2);
Arg = atan2(K(1,2),K(1,1));
% Berechnung der fehlenden Ecken
for i=1:Num-1
    K(i+1,1) = Bet*cos(Arg+2*pi*i/Num);
    K(i+1,2) = Bet*sin(Arg+2*pi*i/Num);
    K(i+1,:) = K(i+1,:) + M;
end
K(1,:) = K(1,)+M;
% Ausgabe aller Ecken
for i=1:Num
    fprintf('Ecke Nr. %02d: %5.2f + i*(%5.2f) = %f\n',...
        i,K(i,:),sqrt(K(i,1)^2+K(i,2)^2),atan2(K(i,2),K(i,1)));
end
% graphische Ausgabe des n-Ecks
grid on
plot(K(:,1),K(:,2),'r*');

```

Literatur

Bryan, K. und Leise, T. The \$ 25,000,000,000 Eigenvector: The Linear Algebra behind Google.
SIAM Review, **48**(3): (2006), 569–581.

Symbolverzeichnis

Quantoren

Symbol	Definition & Beschreibung	Referenz
\forall	"für alle" Allquantor	
\exists	"es existiert ein" Existenzquantor	
$\exists!$	"es existiert genau ein"	
\nexists	"es existiert kein/nicht"	
\perp	"ist orthogonal/senkrecht"	
\parallel	"ist parallel/richtungsgleich"	
\cong	"ist isomorph"	
\rightsquigarrow	"führt zu"	

Mengen

Symbol	Definition & Beschreibung	Referenz
e_i	$= (\delta_{ij})_{1 \leq j \leq n}$ i -ter Einheitsvektor im \mathbb{R}^n	
\mathcal{K}	$= \{e_1, \dots, e_n\}$ die kanonische Basis	

Räume

Symbol	Definition & Beschreibung	Referenz
$(\mathbb{K}, +, \cdot)$	Körper	Def. 1.2
$(V, \mathbb{K}, +, \cdot)$	kurz: \mathbb{K} Vektorraum V über dem Körper \mathbb{K}	Def. 3.1
$(V, \mathbb{K}, +, \cdot, s)$	kurz: V Prähilbertraum mit Skalarprodukt $s(\cdot, \cdot)$	Def. 3.12
(V, \mathbb{R}, s)	kurz: (V, s) uklidischer Vektorraum	Def. 3.12
(V, \mathbb{C}, s)	unitärer Vektorraum	Def. 3.12
$(V, \mathbb{K}, +, \cdot, \ \cdot\ _V)$	Normierter Raum mit Norm $\ \cdot\ _V$ kurz: $(V, \ \cdot\ _V)$	Def. 3.14
$\text{Hom}(V, W)$	$\{\mathcal{A} : V \rightarrow W \mid \mathcal{A} \text{ ist ein Homomorphismus}\}$	
$V \cong W$	V ist isomorph zu W	

Abbildungen

Symbol	Definition & Beschreibung	Referenz
$x \cdot y$	$= \langle x, y \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ Standardskalarprodukt	

Symbolverzeichnis

$x \times y$	$: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ Vektorprodukt/Kreuzprodukt
$\langle z, x, y \rangle$	$= z \cdot (x \times y) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ Spatprodukt
$\cong \rightarrow$	isomorphe Abbildung
\det	$: \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ Determinante
p_f	charakteristisches Polynom von f
$\ \cdot \ _V$	nicht genauer definierte Norm in V
$s(\cdot, \cdot)$	nicht genauer definiertes Skalarprodukt in V
$\ \cdot \ _s$	Euklidische Norm zum Skalarprodukt $s(\cdot, \cdot)$
$\langle x, y \rangle$	Standardskalarprodukt (im \mathbb{R}^n)
$\ \cdot \ _2$	Euklidische Norm zum Standardskalarprodukt kurz: $\ \cdot \ $ oder $ \cdot $

sonstige

Symbol	Definition & Beschreibung	Referenz
VR	Vektorraum	Def. 3.1
UVR	Unter(vektor)raum	
EW /EWe	Eigenwert/Eigenwerte	
EV /EVen	Eigenvektor/Eigenvektoren	
ER	Eigenraum	

Index

- (m, n) -Matrizen, 35
- cos, 12
- sin, 12
- (direkte) Summe von Unterräumen, 72
- Ähnlichkeit von Matrizen, 127
- ähnlich, 127
- äusseres Produkt, 24
- Bild, 78
- 2-Tupel, 7

- adjungierte Matrix, 72
- affin-linear, 92
- affine Abbildung, 77
- affinen Koordinatensystem, 92
- affiner Raum, 92
- affines Koordinatensystem, 62
- algebraischer Vielfachheit, 101
- Argument von $z \neq 0$, 19
- Automorphismus, 86

- Basis & Dimension, 58
- Betrag, 11
- Betrag von z , 19
- bijektiv, 86
- Bildvektor, 78
- Bogenmas, 13

- Cauchy-Schwarzsche Ungleichung, 64

- diagonalisierbar, 129
- Diagonalmatrix, 35
- Distanzfunktion, 18

- Eigenvektor, 97
- Eigenwert, 97
- Einheitsmatrix, 35
- Einsteinsche Summenkonvention, 117
- Endomorphismus, 86
- Epimorphismus, 86
- Erzeugendensystem & lineare Hülle, 58
- ESK, 117
- Euklidische Norm, 64

- Eulergleichung, 144

- ganze Zahlen, 4
- Gaussche Ebene, 7
- geometrische Vielfachheit, 102
- Gerade, 9
- Gleichheit von Matrizen, 35
- Googlematrix, 108
- Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren, 70

- Hauptdiagonale, 35
- hermitesch, 72
- Homomorphismus, 75

- Identität, 89
- Imaginärteil, 6
- injektiv, 86
- isomorphe Räume, 88
- isomorphe Vektorräume, 113
- Isomorphismus, 86

- Jägerzaunregel, 48

- Körper, 4
- kartesisches Koordinatensystem, 62
- Kern, 78
- kommutatives Diagramm, 112
- komplementäre Matrix, 50
- komplex konjugierte Matrix, 72
- Komplexe Zahlen, 6
- Komposition, 84
- konjugiert komplexes, 6
- Koordinaten & Koordinatenvektor, 62
- Kreuzprodukt, 18, 24
- Kreuzprodukt im \mathbb{R}^2 , 18
- Kronecker Symbol, 62

- lineare Abbildung, 75
- lineare Abhängigkeit, 57

- Matrix, 34

- Matrix des Basiswechsels, 123
- Matrix einer Abbildung, 116
- Matrixprodukt, 36
- MiniPoly, 104
- Monome, 71
- Monomorphismus, 86

- natürliche Zahlen, 4
- Nebendiagonale, 35
- Norm, 64
- Normalenvektor, 16
- Normalvektor, 67
- normiert, 16
- normierter Vektor, 67

- obere/untere Dreiecksmatrix, 36
- orthogonal, 15, 66
- Orthogonal- und Orthonormalbasis, 67
- orthogonale Matrix, 46
- orthogonale Projektion, 68
- orthogonales Komplement, 68
- orthonormal, 16
- Ortsvektoren, 8

- parallel, 16, 66
- Parameterdarstellungen, 9
- Parameterdarstellung einer Geraden, 10
- Pauli-Matrizen, 73
- Polarkoordinaten, 19
- pwv, 102

- Rang, 43
- rationale Zahlen, 4
- Realteil, 6
- reelle Zahlen, 4
- Regel von Sarrus, 48
- Richtungsvektor, 9, 10

- senkrecht, 15, 66
- Skalare, 4
- Skalarprodukt, 63
- spaltenstochastische Matrix, 107
- Spatprodukt, 47
- Stützpunkt, 10
- Standarddreieck, 95

- Standardskalarprodukt, 11, 63
- Strecke, 9
- Streichmatrix, 49
- surjektiv, 86
- symmetrische Matrix, 35

- Transponierte einer Matrix, 37

- Umkehrabbildung, 88
- Unter(vektor)raum, (UVR.), 56

- Vektorprodukt, 24
- Vektorraum (VR), 55
- Vfh, 102

- Winkel, 14, 66

- Zahlmengen, 4
- zusammengesetzte Abbildung, 84

Matrixdarstellung

Problemstellung: Sei $f \in \text{Hom}(V, W)$ mit den Basen
 $\mathcal{V} = \{v_1, \dots, v_n\}$ von V und $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ von W .
 Berechnen Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zur Abbildung f bezüglich der Basen \mathcal{V} und \mathcal{W} .

<p>kommutatives Diagramm: $f \in \text{Hom}(V, W)$</p> $ \begin{array}{ccc} a \in V & \xrightarrow{f} & W \ni b \\ \Phi_{\mathcal{V}} \downarrow & & \uparrow \Phi_{\mathcal{W}}^{-1} \\ \alpha \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m \ni \beta \end{array} $	<p>am Beispiel: $f \in \text{Hom}(\mathbb{P}_3, \mathbb{P}_2)$ mit</p> $f(p(x)) = x \cdot p''(x)$ <p>und den Basen</p> $ \begin{aligned} \mathcal{V} &= \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \{1, x, x^2, x^3\} \\ \mathcal{W} &= \{w_1, w_2, w_3\} = \{1, 1-x, (1-x)^2\} \end{aligned} $
---	--

anzuwendende Formel:

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^m A_{ji} w_j, \quad i = 1, \dots, n$$

Schritt 1: $i = 1$

<p>Berechne A_{11}, \dots, A_{m1} (das ist die 1-te Spalte der gesuchten Matrix) aus der Formel</p> $f(v_1) = \sum_{j=1}^m A_{j1} w_j$	<p>Aus</p> $f(v_1) = f(1) = x \cdot 1'' = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$ <p>und</p> $ \begin{aligned} &A_{11} w_1 + A_{21} w_2 + A_{31} w_3 \\ &= A_{11} \cdot 1 + A_{21} \cdot (1-x) + A_{31} \cdot (1-x)^2 \\ &= (A_{11} + A_{21} + A_{31})1 - (A_{21} + 2A_{31})x + A_{31}x^2 \end{aligned} $ <p>folgt durch Koeffizientenvergleich</p> $A_{31} = 0, \quad A_{21} = 0, \quad A_{11} = 0.$
---	--

Schritt 2: $i = 2$

<p>(2-te Spalte der gesuchten Matrix)</p> \vdots	<p>Aus $f(v_2) = f(x) = 0$ und</p> $ \begin{aligned} &A_{12} w_1 + A_{22} w_2 + A_{32} w_3 \\ &= (A_{12} + A_{22} + A_{32}) - (A_{22} + 2A_{32})x + A_{32}x^2 \end{aligned} $ <p>folgt $A_{32} = 0, \quad A_{22} = 0, \quad A_{12} = 0.$</p>
--	---

Schritt 3: $i = 3$

(3-te Spalte der gesuchten Matrix)

⋮

Aus $f(v_3) = f(x^2) = 2x$ und

$$\begin{aligned} & A_{13} w_1 + A_{23} w_2 + A_{33} w_3 \\ &= (A_{13} + A_{23} + A_{33}) - (A_{23} + 2A_{33})x + A_{33}x^2 \end{aligned}$$

folgt $A_{33} = 0$, $A_{23} = -2$, $A_{13} = 2$.

Schritt 4: $i = 4 (= n)$

Berechne A_{1n}, \dots, A_{mn} (die letzte Spalte der gesuchten Matrix) aus der Formel

$$f(v_n) = \sum_{j=1}^m A_{jn} w_j$$

Aus $f(v_4) = f(x^3) = 6x^2$ und

$$\begin{aligned} & A_{14} w_1 + A_{24} w_2 + A_{34} w_3 \\ &= (A_{14} + A_{24} + A_{34}) - (A_{24} + 2A_{34})x + A_{34}x^2 \end{aligned}$$

folgt $A_{34} = 6$, $A_{24} = -12$, $A_{14} = 6$.

Insgesamt erhalten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Stichprobe: Wir vergleichen in der Stichprobe, ob der Weg "oben" rum ($f : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$) im kommutativen Diagramm das gleiche Ergebnis liefert wie der Weg "unten" rum ($\Phi_W^{-1} \circ A \circ \Phi_V : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{P}_2$).

"oben" rum:

$$p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8 \quad \Rightarrow \quad f(p(x)) = x \cdot p''(x) = 24x^2 - 24x$$

"unten" rum:

$$\begin{aligned} \Phi_V(p) &= (8, 0, -12, 4) = \alpha \quad \Rightarrow \quad A\alpha = (0, -24, 24) = \beta \\ \Rightarrow \quad \Phi_W^{-1}(\beta) &= -24x + 24x^2 = b \quad \checkmark \end{aligned}$$

Bemerkung:

Ist $V = W$ und $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ so ersetze in der Formel w_j durch v_j .

Basiswechsel

Problemstellung: Gegeben ist eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Gesucht ist eine Matrix $M \in \mathbb{R}^{n \times m}$, die ähnlich ist zu B , d.h. es gibt Transformationsmatrizen $T \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bezüglich der Basen

$$\mathcal{Z} = \{z_1, \dots, z_m\} \text{ von } \mathbb{R}^m \text{ und } \mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_n\} \text{ von } \mathbb{R}^n,$$

so dass $M = S B T^{-1}$ gilt.

kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} a \in \mathbb{R}^m & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^n \ni b \\ T \downarrow & & \uparrow S^{-1} \\ \alpha \in \mathbb{R}^m & \xrightarrow{M} & \mathbb{R}^n \ni \beta \end{array}$$

am Beispiel: $n = 2, m = 3$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Z} = \{z_1, z_2, z_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{Y} = \{y_1, y_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

anzuwendende Formel:

$$M = S B T^{-1}$$

Schritt 1:

$$T^{-1} = (z_1, \dots, z_m)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Schritt 2:

$$S = (y_1, \dots, y_n)^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Schritt 3:

$$M = S B T^{-1}$$

$$\begin{aligned} M &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 10 & 8 & 19 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Stichprobe: Wir vergleichen in der Stichprobe, ob der Weg "oben" rum ($B : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$) im kommutativen Diagramm das gleiche Ergebnis liefert wie der Weg "unten" rum ($T M S^{-1} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$).

"oben" rum:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B a = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = b$$

"unten" rum:

$$\alpha = T a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

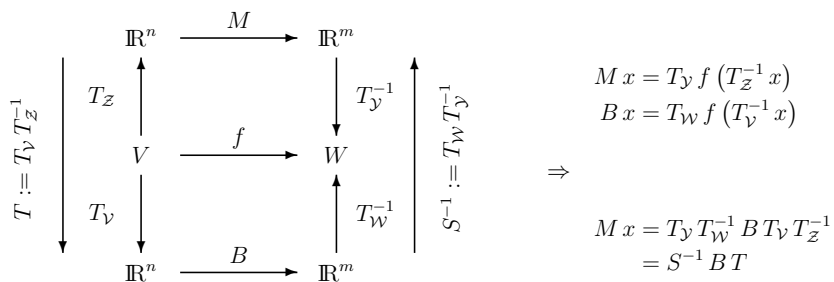
$$\beta = M \alpha = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 10 & 8 & 19 \\ -1 & -5 & -4 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 84 \\ -42 \end{pmatrix}$$

$$b = S^{-1} \beta = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 84 \\ -42 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

Bemerkung:

Ist M die Matrix zur Abbildung $f \in \text{Hom}(V, W)$ bezüglich der Basen \mathcal{Z} von V und \mathcal{Y} von W und B die Matrix zur Abbildung $f \in \text{Hom}(V, W)$ bezüglich der Basen \mathcal{V} von V und \mathcal{W} von W , dann sind M und B ähnlich mit den Transformationsmatrizen

$$T = T_{\mathcal{V}} T_{\mathcal{Z}}^{-1} \quad \text{und} \quad S = T_{\mathcal{Y}} T_{\mathcal{W}}^{-1}.$$



Diagonalisierung

Problemstellung: Gegeben ist eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Gesucht ist die Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (sofern es diese gibt!), die ähnlich ist zu B und die Transformationsmatrix $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$B = T^{-1} D T.$$

kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} a \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^n \ni b \\ T \downarrow & & \uparrow T^{-1} \\ \alpha \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}^n \ni \beta \end{array}$$

am Beispiel: $n = 4$

$$B = \begin{pmatrix} 6 & -12 & -4 & 8 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & -6 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Schritt 1: Eigenwerte von B

Berechnen Sie alle λ mit

$$\det(B - \lambda E_n) = 0.$$

Sie erhalten als Lösung $\lambda_1, \dots, \lambda_l, l \leq n$.

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(B - \lambda E_4) \\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 2, 4\} \end{aligned}$$

Schritt 2: Eigenvektoren von B

Berechnen Sie für jedes λ_i aus Schritt 1 den entsprechenden Eigenraum U_{λ_i} . Lösen Sie dazu jeweils das homogene LGS

$$B - \lambda_i E_n = 0, \quad i \in \{1, \dots, l\}$$

$\lambda_1 = -2$:

$$A + 2E_4 \xrightarrow[\text{umformungen}]{\text{Zeilen-}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_{\lambda_1} = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\lambda_2 = 2$:

$$A - 2E_4 \xrightarrow[\text{umformungen}]{\text{Zeilen-}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_{\lambda_2} = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} s, \right. \\ \left. t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\lambda_3 = 4:$$

$$A - 4E_4 \xrightarrow{\substack{\text{Zeilen-} \\ \text{umformungen}}} \begin{pmatrix} 1 & -6 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow U_{\lambda_3} = \left\{ v \in \mathbb{R}^4 \mid v = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Schritt 3: Prüfung auf Diagonalisierbarkeit

Ist die Summe der Dimensionen aller Eigenräume gleich der Dimension von V , d.h. gilt

$$\bigcup_{i=1}^l \text{Dim } U_{\lambda_i} = n$$

so ist die Matrix B diagonalisierbar.

$$\bigcup_{i=1}^3 \text{Dim } U_{\lambda_i} = \text{Dim } U_{\lambda_1} + \text{Dim } U_{\lambda_2} + \text{Dim } U_{\lambda_3}$$

$$= 1 + 2 + 1 = 4 = n \quad \checkmark$$

B ist diagonalisierbar.

Schritt 4: Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_i & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & \lambda_l \end{pmatrix} \quad n \text{ Zeilen}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Schritt 4: Transformationsmatrix

$$T^{-1} = \left(\underbrace{v_1^1, \dots, v_1^{l_1}}_{\text{EVen zum EW } \lambda_1}, \dots, \underbrace{v_l^1, \dots, v_l^{l_l}}_{\text{EVen zum EW } \lambda_l} \right)$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Test: Es sollte nun $D = T B T^{-1}$ bzw. $T^{-1} D = B T^{-1}$ erfüllt sein!

$$T^{-1} D = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 & -4 \\ 2 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B T^{-1} \quad \checkmark$$