Blatt 23: Komplexe Zahlen (Teil 3) MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

$$
\begin{array}{llll}
(a) & z^2 = -20 & (b) & (z+3)^2 = -64 \\
(c) & z^2 + 6\,z + 25 = 0 & (d) & z^2 = 5 + 12\,i \\
(e) & z^2 + (2-4\,i)\,z - 11 + 2\,i = 0 & (f) & z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0 \\
(g) & 4z^3 + z + 5 = 0 & (h) & z^4 - (2-i)z^3 - 2iz^2 = 0 \\
(i) & iz^3 - z^2 + iz - 1 = 0 & &
\end{array}
$$

Aufgabe 2:

Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & (1+2\,i)\,z = (5-i)\,z + 7 + 26\,i \\
(b) & (z+5\,i)(4+2\,i) - (z+2)(4+2\,i) = 24 + 2\,i \\
(c) & \dfrac{(1+2\,i)\,z + 2 - 3\,i}{(5+i)\,z + 27 - 20\,i} = -6 \\
(d) & (1+i)\,z + (5-3\,i)\,\overline{z} = 20 + 20\,i \\
(e) & (2+i)\mathrm{Re}(i\,\overline{z}) - (3-2\,i)\mathrm{Im}(z) = 1 + 3i \\
(f) & 2\overline{z}^2 + 6\,z + 11 = 0
\end{array}
$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie folgende Logarithmen von komplexen Zahlen:

a) $\ln(2+5i)$

b) $\ln(-4i)$

c) $\ln(-2-\pi i)$.

d) Gilt $\ln(w \cdot z) = \ln(w) + \ln(z)$ für beliebige w und z in $\mathbb{C}$?

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die kartesische Form folgender Ausdrücke:

a) $(1+i)^{1+i}$

b) $(-2)^{3-i}$

c) $(-3i)^{-5i}$

d) Lösen Sie die Gleichung $z^{-i} = -i$.

Aufgabe 5:

Überlegen Sie sich irgend einen komplizierten mathematischen Ausdruck mit komplexen Zahlen und versuchen Sie ihn auszurechnen. Da Sie alle Rechenregeln der komplexen Zahlen kennen, sollten Sie in der Lage sein, das Resultat in kartesischer Form anzugeben. Wenn Ihnen gerade die Kreativität fehlt, sich selbst etwas auszudenken, seien hier folgende vier Vorschläge gemacht:

a) $\sqrt[i]{1} = ?$ Das Wurzelzeichen zu verwenden, ist hier etwas fragwürdig, da man es eigentlich nur für positive reelle Zahlen verwenden sollte. Man soll hier darunter die $1/i$-te Potenz von 1 (also 1 hoch $1/i$) verstehen.

b) $\sin(i)$

c) $\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{i}}$

d) $\mathrm{Arcosh}\,(1+i)\ = ?$ Bei der Funktion "Arcosh" handelt es sich um den **Area Cosinus Hyperbolicus**, das heißt um die Umkehrfunktion des Cosinus Hyperbolicus (schwierig).

Lösung 1:

(a)

$$\begin{aligned} & w = -20 && |w| = 20 && \operatorname{Arg}(w) = \pi \\ \Rightarrow\quad & w = 20\,\mathrm{e}^{i(\pi + 2\,\pi\,k)} \\ \Rightarrow\quad & z_k = 2\,\sqrt{5}\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\,k\right)} && k = 0, 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} z_0 &= 2\,\sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\,\sqrt{5}\,i \\ z_1 &= 2\,\sqrt{5}\left(\cos\frac{3\,\pi}{2} + i\,\sin\frac{3\,\pi}{2}\right) = -2\,\sqrt{5}\,i \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & w = -64 = -2^6 && |w| = 2^6 && \operatorname{Arg}(w) = \pi \\ \Rightarrow\quad & w = 2^6\,\mathrm{e}^{i(\pi + 2\,\pi\,k)} \\ \Rightarrow\quad & \tilde{z}_k = 2^3\,\mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2} + \pi\,k\right)} && k = 0, 1 \\ \Rightarrow\quad & \tilde{z}_0 = 8\,i && \tilde{z}_1 = -8\,i \\ \Rightarrow\quad & z_0 = -3 + 8\,i && z_1 = -3 - 8\,i \end{aligned}$$

(c)

$$z_{0,1} = \frac{-6 \pm \sqrt{-64}}{2} = \frac{-6 \pm 8\,i}{2} = -3 \pm 8\,i$$

(d)

$$\begin{aligned} & w = 5 + 12\,i && |w| = 13 && \operatorname{Arg}(w) = \operatorname{atan2}\left(\frac{12}{5}\right) =: \varphi \\ \Rightarrow\quad & w = 13\,\mathrm{e}^{i\,\varphi} \\ \Rightarrow\quad & z_k = \sqrt{13}\,\mathrm{e}^{i\,\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\,k\right)} && k = 0, 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & z_0 = \sqrt{13}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{13}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\,\sin\frac{\varphi}{2}\right) = 3 + i\,2 \\ \Rightarrow\quad & z_1 = \sqrt{13}\,\mathrm{e}^{i\,\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)} = \sqrt{13}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right) = -3 - i\,2 \end{aligned}$$

(e)

Mit der Mitternachtsformel gilt:

$$z_{0,1} = \frac{1}{2}\left(4\,i - 2 \pm \sqrt{(2-4\,i)^2 - 4\,(2\,i - 11)}\right)$$

dabei ist

$$(2-4\,i)^2 = -12 - 16\,i$$

und

$$(2-4\,i)^2 - 4\,(2\,i-11) = 4\,(8-6\,i)$$

also zusammen

$$z_{0,1} = 2\,i - 1 \pm \sqrt{8-6\,i}\,.$$

Die Wurzel separat:

$$\begin{aligned} & w = 8 - 6\,i \quad \Rightarrow \quad |w| = 10\,, \quad \operatorname{Arg}(w) = \arctan\left(\frac{-3}{4}\right) =: \varphi \\ \Rightarrow \quad & w = 10\,\mathrm{e}^{i\,\varphi} \\ & \tilde{z}_{0,1} = \sqrt{10}\,\mathrm{e}^{i\,\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\,k\right)}\,, \quad k = 0,1 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \tilde{z}_0 &= \sqrt{10}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\,\sin\frac{\varphi}{2}\right) = 3 - i \\ \tilde{z}_1 &= \sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right) + i\,\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right) = -3 + i\,. \end{aligned}$$

Und damit ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned} z_0 &= 2 + i \quad \text{und} \\ z_1 &= -4 + 3\,i\,. \end{aligned}$$

(f) $z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$. Man erkennt als Nullstelle z.B. $z = i$, denn

$$i^3 + 2i^2 + i + 2 = -i - 2 + i + 2 = 0.$$

Da in Polynomen mit reellen Koeffizienten die Nullstellen immer in komplex konjugierten Paaren auftreten, muss dann auch $z = -i$ eine Lösung sein. Wir divideren also das Polnom durch $(z-i)(z+i) = z^2 + 1$. Wir bekommen

$$\left(z^3 + 2z^2 + z + 2\right) : (z^2 + 1) = z + 2.$$

Die 3. Nullstelle ist $z = -2$ somit ist das Polynom in Linearfaktoren zerlegt:

$$z^3 + 2z^2 + z + 2 = (z+2)(z+i)(z-i). \tag{1}$$

(g) Sehr leicht erkennt man $z = -1$ als reelle Nullstelle von

$$4z^3 + z + 5 = 0.$$

Wir divideren also durch $z + 1$ und bekommen

$$(4z^3 + z + 5) : (z + 1) = 4z^2 - 4z + 5.$$

Wir landen also bei einer quadratischen Gleichung mit den Lösungen

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 20}}{8} = \frac{4 \pm \sqrt{-64}}{8} = \frac{4 \pm 8i}{8} = \frac{1}{2} \pm i.$$

Es gilt also:

$$4z^3 + z + 5 = 4\,(z + 1)\left(z - \frac{1}{2} - i\right)\left(z - \frac{1}{2} + i\right).$$

(h) Zuerst klammern wir einen Faktor z^2 aus. Das Polynom hat also eine doppelte Nullstelle $z = 0$:

$$z^4 - (2 - i)z^3 - 2iz^2 = z^2(z^2 - (2 - i)z - 2i = 0.$$

Der Rest ist eine quadratische Gleichung mit komplexen Koeffizienten. Die Auflösungsformel ergibt:

$$z = \frac{2 - i \pm ((2 - i)^2 + 8i)^{1/2}}{2} = \frac{2 - i \pm (4 - 4i - 1 + 8i)^{1/2}}{2} = \frac{2 - i \pm (3 + 4i)^{1/2}}{2}.$$

Um den letzten Term vereinfachen zu können, müssen wir also zuerst noch die Gleichung

$$w^2 = 3 + 4i$$

lösen. Wir erhalten zwei reelle Gleichungen für $w = a + ib$:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= |3 + 4i| = 5, \\ a^2 - b^2 &= \mathrm{Re}(3 + 4i) = 3 \end{aligned}$$

mit den Lösungen $a = \pm 2$ und $b = \pm 1$. Es ist also

$$\pm\,(3 + 4i)^{1/2} = \pm(2 + i).$$

Wenn wir dies einsetzen bekommen wir für die zwei restlichen Nullstellen

$$z = \frac{2 - i \pm (3 + 4i)^{1/2}}{2} = \frac{2 - i \pm (2 + i)}{2} = \begin{cases} 2 \\ -i \end{cases}$$

Damit faktorisiert das Polynom in die folgenden Faktoren

$$z^4 - (2 - i)z^3 - 2iz^2 = z^2(z - 2)(z + i).$$

(i) $z = i$ ist eine Nullstelle des Polynoms, denn

$$ii^3 - i^2 + i^2 - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

Division durch $z - i$ ergibt:

$$\big(iz^3 - z^2 + iz - 1\big) : (z - i) = iz^2 - 2z - i.$$

Die quadratische Gleichung ergibt mit der Mitternachtsformel

$$z = \frac{2 \pm \left(4 - 4 \cdot i(-i)\right)^{1/2}}{2i} = \frac{2 - 0}{2i} = -i.$$

$z = -i$ ist eine doppelte Nullstelle, denn wir haben eine Diskriminante gleich 0 erhalten. Zerlegt in Linearfaktoren ist das Polynom also

$$iz^3 - z^2 + iz - 1 = i(z - i)(z + i)^2.$$

Lösung 2:

(a)	$z = 2 - 5\,i$	(b)	$\emptyset$
(c)	$z = -4 + 5\,i$	(d)	$z = -5\,i$
(e)	$z = x + i\,, \quad x \in \mathbb{R}$	(f)	$z_{0,1} = \frac{1}{2}(3 \pm 7\,i)$

Lösung 3:

a)

$$\ln(2 + 5i) = \ln\left(|2 + 5i|\right) + i\arg\left(2 + 5i\right),$$

wobei

$$|2 + 5i| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$$
$$\arg\left(2 + 5i\right) = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) \approx 1.1903.$$

Somit gilt:

$$\ln\left(2 + 5i\right) = \frac{1}{2}\ln(29) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{29}}\right) i \approx 1.6836 + 1.1903i$$

b)

$$\ln(-4i) = \ln\left(4e^{-i\frac{\pi}{2}}\right) = \ln(4) - i\frac{\pi}{2}.$$

c)
$$\ln(-2-\pi i) = \ln(|-2-\pi i|) + i\arg(-2-\pi i),$$

wobei

$$|-2-\pi i| = \sqrt{4+\pi^2},$$
$$\arg(-2-\pi i) = -\arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{4+\pi^2}}\right) \approx -2.1377.$$

Somit gilt:

$$\ln(-2-\pi i) = \frac{1}{2}\ln\left(4+\pi^2\right) - \arccos\left(\frac{-2}{\sqrt{4+\pi^2}}\right) i \approx 1.3149 - 2.1377i$$

d) Die linke Seite der Gleichung ist gemäß der Definition des komplexen Logarithmus:

$$\begin{aligned}\ln(w)+\ln(z) &= \ln(|w|) + i\arg(w) + \ln(|z|) + i\arg(z) = \\ &= \ln(|w|) + \ln(|z|) + i\left(\arg(w)+\arg(z)\right) = \ln(|wz|) + i\left(\arg(w)+\arg(z)\right).\end{aligned}$$

Die rechte Seite ist dagegen
$$\ln(|wz|) + i\arg(wz).$$

Daran sieht man schon, dass die Gleichung nicht für alle w, z in $\mathbb{C}$ stimmen kann. Der Realteil stimmt zwar überein, aber nicht der Imaginärteil. Denn für zwei komplexe Zahlen w und z ist im Allgemeinen

$$\arg(wz) \neq \left(\arg(w)+\arg(z)\right),$$

da die rechte Seite nicht immer ins Intervall $]-\pi,\pi]$ zu liegen kommt. Nehmen wir als Gegenbeispiel $w=-1$ und $z=i$. Dann ist

$$\ln(wz) = \ln(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2},$$

aber
$$\ln(w)+\ln(z) = \ln(-1)+\ln(i) = \ln(1) + i\pi + \ln(1) + i\frac{\pi}{2} = i\frac{3\pi}{2}.$$
Daran sieht man, dass die Imaginärteile sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden.

Lösung 4:

a) Die Basis der Potenz ist mit Hilfe des komplexen Logarithmus umzuschreiben:

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\ln(1+i)}.$$

Wir benötigen also den Logarithmus

$$\ln(1+i) = \ln\left(\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\ln(2) + i\frac{\pi}{4}.$$

Dies eingesetzt, liefert:

$$(1+i)^{1+i} = e^{(1+i)\ln(1+i)} = e^{(1+i)\left(\frac{1}{2}\ln(2)+i\frac{\pi}{4}\right)} = e^{\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{\pi}{2}\right)} e^{\frac{i}{2}\left(\ln(2)+\frac{\pi}{2}\right)} =$$
$$= e^{\frac{1}{2}\left(\ln(2)-\frac{\pi}{2}\right)} \left[\cos\left(\frac{2\ln(2)+\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\ln(2)+\pi}{4}\right)\right] \approx 0.2740 + 0.5837i$$

b) Wir schreiben die Potenz wieder um mit dem Logarithmus:

$$(-2)^{3-i} = e^{\ln(-2)(3-i)},$$

wobei

$$\ln(-2) = \ln(2) + i\pi.$$

Damit

$$(-2)^{3-i} = e^{\ln(-2)(3-i)} = e^{(\ln(2)+i\pi)(3-i)} = e^{3\ln(2)+\pi} e^{i(3\pi-\ln(2))} =$$
$$= 8e^{\pi}\left[\cos\left(3\pi-\ln(2)\right) + i\sin\left(3\pi-\ln(2)\right)\right] \approx -142.406 + 118.288i$$

c)

$$(-3i)^{-5i} = e^{-5i\ln(-3i)},$$

wobei

$$\ln(-3i) = \ln(|-3i|) + i\arg(-3i) = \ln(3) - \frac{\pi}{2}i.$$

Somit bekommt man

$$(-3i)^{-5i} = e^{-5i\left(\ln(3)-\frac{\pi}{2}i\right)} = e^{-\frac{5\pi}{2}} e^{-5i\ln(3)} = e^{-\frac{5\pi}{2}}\left[\cos\left(-5\ln(3)\right) + i\sin\left(-5\ln(3)\right)\right] =$$
$$= e^{-\frac{5\pi}{2}}\left[\cos\left(5\ln(3)\right) - i\sin\left(5\ln(3)\right)\right] \approx 0.0002732 + 0.0002758i$$

d) Bei Gleichungen von der Form $z^{-i} = -i$ muss die Mehrdeutigkeit berücksichtigt werden. Schreibt man die rechte Seite in die Exponentialdarstellung um ergibt sich:

$$z^{-i} = e^{-\frac{\pi}{2}i + k\cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Von dieser Gleichung nehmen wir nun auf beiden Seiten die i-te Potenz und bekommen:

$$z = \left(e^{-\frac{\pi}{2}i + k\cdot 2\pi i}\right)^{i} = e^{\frac{\pi}{2} - k\cdot 2\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Gleichung hat also eine diskrete Folge von unendlich vielen reellen Zahlen als Lösungen, nämlich

$$z = \ldots,\ e^{-\frac{7\pi}{2}},\ e^{-\frac{3\pi}{2}},\ e^{\frac{\pi}{2}},\ e^{\frac{5\pi}{2}},\ e^{\frac{9\pi}{2}},\ \ldots.$$

Nicht überzeugt? Dann überprüfen Sie die Lösung, indem Sie die Zahlen "hoch $-i$" nehmen. Sie werden feststellen, dass jedesmal $-i$ herauskommt. Während also die Gleichung

$$z^{-i} = -i$$

unendlich viele Lösungen hat, hat der Ausdruck

$$(-i)^i = (e^{-i\frac{\pi}{2}})^i = e^{-i^2\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}$$

einen eindeutigen Wert. Selbigen erhält man ebenso über den Logarithmus:

$$(-i)^i = e^{i\ln(-i)} = e^{i(0-i\frac{\pi}{2})} = e^{-i^2\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}}.$$

Es gibt also keinen Widerspruch oder so.

Lösung 5:

a) $\sqrt[i]{\bullet}$ ist eigentlich nicht definiert. Wir meinen damit also den Ausdruck $1^{1/i}$. Intuitiv vermuten wir, dass das 1 geben könnte, weil eine Potenz von 1 doch immer 1 geben sollte. Doch ist es wirklich so?

$$1^{1/i} = 1^{-i} = \left(e^{\ln(1)}\right)^{-i} = e^{-i\ln(1)} = \mathrm{cis}(-\ln(1)) = \cos\left(-\ln(1)\right) + i\sin\left(-\ln(1)\right) = 1.$$

Also ja, es ist tatsächlich so. 1 hoch z gibt immer 1, auch für $z \in \mathbb{C}$.

b) Hier müssen wir uns zuerst überlegen, wie wir die Sinusfunktion auf die gesamte komplexe Ebene $\mathbb{C}$ erweitern können. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \end{aligned}$$

Wir benutzen die zweite Formel - die Eulersche Gleichung - für den $\sin(i)$:

$$\sin(i) = \frac{e^{i^2}-e^{-i^2}}{2i} = \frac{e^{-1}-e^{1}}{2i} = \frac{-i\frac{1}{e}+ie}{2} = \frac{e^2-1}{2e}i \approx 1.1752i.$$

c) Wir stellen zuerst fest $1/i = -i$. Dann ist:

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{i}} = (-i)^{-i} = \left(e^{\ln(-i)}\right)^{-i} = e^{-i\ln(-i)}$$

Wir berechnen den Logarithmus von $-i$:

$$\ln(-i) = \ln(|-i|) + i\arg(-i) = \ln(1) - i\frac{\pi}{2} = -i\frac{\pi}{2}.$$

Dies können wir nun verwenden:

$$\left(\frac{1}{i}\right)^{\frac{1}{i}} = e^{-i\ln(-i)} = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \approx 0.20788.$$

d) Da der Arcosh die Umkehrfunktion von $\cosh$ ist, wollen wir die Gleichung

$$\cosh(z) = 1 + i$$

lösen. Dafür müssen wir die rechte Seite in Real- und Imaginärteil aufteilen. Für $z = x + iy$ gilt:

$$\begin{aligned}\cosh(z) &= \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{e^x e^{iy} + e^{-x} e^{-iy}}{2} = \frac{1}{2}\left[e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right) + e^{-x}\left(\cos(y) - i\sin(y)\right)\right] = \\ &= \frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos(y) + i\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin(y) = \cosh(x)\cos(y) + i\sinh(x)\sin(y).\end{aligned}$$

Vergleichen wir Real- und Imaginärteil erhält man ein reelles Gleichungssystem für x und y:

$$\begin{aligned}\cosh(x)\cos(y) &= 1,\\ \sinh(x)\sin(y) &= 1.\end{aligned}$$

Wir ersetzen in der 2. Gleichung $\sin$ durch $\cos$:

$$\begin{aligned}\sinh(x)\sqrt{1 - \cos^2(y)} &= 1,\\ \Rightarrow \quad 1 - \cos^2(y) &= \frac{1}{\sinh^2(x)},\\ \Rightarrow \quad \cos^2(y) &= 1 - \frac{1}{\sinh^2(x)} = \frac{\sinh^2(x) - 1}{\sinh^2(x)}.\end{aligned}$$

Dies setzen wir in die 1. Gleichung ein:

$$\begin{aligned}\cosh(x)\cos(y) &= 1,\\ \Rightarrow \quad \cosh^2(x)\cos^2(y) &= 1,\\ \Rightarrow \quad \frac{\cosh^2(x)\left(\sinh^2(x) - 1\right)}{\sinh^2(x)} &= 1,\\ \Rightarrow \quad \frac{\left(1 + \sinh^2(x)\right)\left(\sinh^2(x) - 1\right)}{\sinh^2(x)} &= 1,\\ \Rightarrow \quad \frac{\sinh^4(x) - 1}{\sinh^2(x)} &= 1,\\ \Rightarrow \quad \sinh^4(x) - \sinh^2(x) - 1 &= 0,\\ \sinh^2(x) &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right).\end{aligned}$$

Die 2. Lösung der quadratischen Gleichung ist nicht relevant, da sie zu imaginären Lösungen führt. Weiter erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sinh(x) &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)},\\ \Rightarrow \quad x &= \operatorname{Arsinh}\left[\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5} + 1\right)}\right] \approx \pm 1.06128.\end{aligned}$$

Nun müssen wir aber noch den Imaginärteil y berechnen:

$$\cos^2(y) = \frac{\sinh^2(x) - 1}{\sinh^2(x)} = \frac{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right) - 1}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \cos(y) &= \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}, \\ \Rightarrow \quad y &= \arccos\left(\pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}\right) \approx \begin{cases} 0.9046 \\ 2.2370 \end{cases} . \end{aligned}$$

Damit haben wir vorläufig mal vier Lösungen

$$\begin{aligned} z_1 &= 1.06128 + 0.9046i, & z_2 &= -1.06128 + 0.9046i, \\ z_3 &= 1.06128 + 2.2370i, & z_4 &= -1.06128 + 2.2370i \end{aligned}$$

gefunden. Es stellt sich heraus, dass nur z_1 eine richtige Lösung ist. Die anderen drei Lösungen sind durch Quadrieren der Gleichungen dazugekommen. Wir erhalten also als Schlussresultat

$$\operatorname{Arcosh}(1+i) = \operatorname{Arsinh}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{5}+1\right)}\right] + i\arccos\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}}\right) \approx 1.06128+0.9046i.$$