School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt 22: Komplexe Zahlen (Teil 2) MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Berechnen Sie

$$(a)\ (-1+i)^5 \qquad (b)\ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{3}-3\,i\right)^8$$

und stellen Sie das Ergebnis in kartesischer Form dar.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie

$$(a)\sum_{k=1}^{50} i^k \quad (b)\prod_{k=1}^{50} i^k \quad (c)\ \text{n, so dass} \sum_{k=1}^{n} i^{2\,k} = -1 \text{ ist} \quad (d)\ \sum_{k=1}^{50} \frac{1}{i^k}$$

Aufgabe 3:

Lösen Sie folgende Gleichungen und geben Sie die Lösungen sowohl in Exponentialform wie auch in kartesischer Form an:

a) $z^6 = -1$

b) $z^3 = 5 + 12i$

c) $z^6 = \sqrt{3} + i$

d) $z^{12} = -64\left(1 - \sqrt{3}i\right)$

Aufgabe 4:

Berechnen Sie alle Nullstellen des Polynoms

$$z^6 + 2z^3 + 1 = 0.$$

Versuchen Sie mit den Nullstellen das Polynom in Linearfaktoren zu zerlegen. Was stellen Sie fest?

Aufgabe 5:

Ein reguläres 6-Eck ist durch den Mittelpunkt $M(5|3)$ und die Ecke $A(9|0)$ gegeben. Verwenden Sie die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ als Modell für den $\mathbb{R}^2$ und berechnen Sie mit Hilfe der komplexen Zahlen die restlichen Eckpunkte des 6-Ecks.

Lösung 1:

(a)

Umwandlung in Exponentialform:

$$\begin{aligned} |-1+i| &= \sqrt{2} \\ \operatorname{Arg}(-1+i) &= \arctan(-1)+\pi && \text{(2. Quadrant)} \\ &= -\frac{\pi}{4}+\pi = \frac{3\pi}{4} \\ \Rightarrow \qquad -1+i &= \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{3\pi}{4}} \end{aligned}$$

Potenzieren:

$$\Rightarrow \qquad (-1+i)^5 = \sqrt{2}^5\,\mathrm{e}^{i\,\frac{15\pi}{4}} = 4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{7\pi}{4}}$$

Umwandeln in kartesische Form:

$$\begin{aligned} &= 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\sin\frac{7\pi}{4}\right) \\ &= 4\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \\ &= 4-4\,i \end{aligned}$$

(b)

Umwandlung in Exponentialform:

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{3}-3\,i\right| &= \sqrt{\frac{1}{9}+9} = \frac{\sqrt{82}}{3} \\ \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{3}-3\,i\right) &= \arctan(-9) \approx -1.46 =: \varphi && \text{(4. Quadrant)} \\ \Rightarrow \qquad \frac{1}{3}-3\,i &= \frac{\sqrt{82}}{3}\,\mathrm{e}^{i\,\varphi} \end{aligned}$$

Potenzieren:

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{3}-3\,i\right)^8 = \frac{82^4}{3^8}\,\mathrm{e}^{i\,8\,\varphi}$$

Umwandeln in kartesische Form:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\left(\left(\frac{1}{3}-3\,i\right)^8\right) &= \frac{82^4}{3^8}\,\cos(8\,\varphi)\\ &= \frac{82^4}{3^8}\,\cos(8\arctan(-9))\\ &= \frac{82^4}{3^8}\,0.633 \qquad\qquad \approx 4362.65\end{aligned}$$

Lösung 2:

(a)

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{50} i^k &= \sum_{l=1}^{25} i^{2\,l}+i^{2\,l-1} = \sum_{l=1}^{25}(-1)^l + i\cdot i^{2\,(l-1)} = \sum_{l=0}^{24}(-1)^{l+1}+i\,(-1)^l\\ &= \frac{-1+(-1)^{25}}{1-(-1)} + i\,\frac{1-(-1)^{25}}{1-(-1)} = -1+i\end{aligned}$$

(b)

$$\prod_{k=1}^{50} i^k = \prod_{l=1}^{25} i^{2\,l}\,i^{2\,l-1} = \prod_{l=1}^{25}(-1)^l\,(-1)^{l-1}\,i = \prod_{l=1}^{25}(-1)^{2\,l-1}\,i = -i$$

(c)

$$\sum_{k=1}^{n} = i^{2\,k} = \sum_{k=0}^{n-1} i^{2\,k+2} = -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k = \frac{(-1)^n-1}{1-(-1)} = \frac{(-1)^n-1}{2} = -1$$

$\Leftrightarrow$

$$n = 2\,l-1$$

Die Gleichung ist für alle ungeraden n erfüllt.

(d)

$$\sum_{k=1}^{50}\left(\frac{1}{i}\right)^k = \sum_{k=0}^{49}\left(\frac{1}{i}\right)^{k+1} = \frac{1}{i}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{i}\right)^{50}}{1-\left(\frac{1}{i}\right)} = \frac{-2}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i} = -1-i$$

Lösung 3:

a) $z^6 = -1$:
Wir schreiben -1 in der Exponentialdarstellung:

$$-1 = e^{i\pi + k\cdot 2\pi i}, \quad k\in\mathbb{Z}$$

Diese Gleichung hoch $1/6$ ergibt:

$$z = \left(e^{i\pi + k\cdot 2\pi i}\right)^{1/6} = e^{i\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In Exponential-/Polar- und kartesischer Form sind die sechs Lösungen dann gegeben durch:

$$z = \begin{cases} e^{-i\frac{5\pi}{6}} = \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, & k = -3, \\ e^{-i\frac{\pi}{2}} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = -i, & k = -2, \\ e^{-i\frac{\pi}{6}} = \left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, & k = -1, \\ e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, & k = 0, \\ e^{i\frac{\pi}{2}} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = i, & k = 1, \\ e^{i\frac{5\pi}{6}} = \left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, & k = 2, \end{cases}$$

Wir haben hier die 6 Lösungen von $k = -3, -2, \ldots, 2$ gewählt, sodass der Winkel im Intervall $]-\pi, \pi]$ zu liegen kommt. Das ist nicht unbedingt nötig. Man hätte ebenso $k = 0, 1, \ldots, 5$ setzen können, was auf die gleichen 6 Lösungen führt. Man beachte jedoch, dass

$$(-1)^{1/6} = e^{i\frac{\pi}{6}} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

eindeutig festgelegt ist.

b) $z^3 = 5 + 12i$:
Die Exponentialdarstellung von $5 + 12i$:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13, \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{5}{13}\right) \approx 1.176, \end{aligned}$$

also

$$5 + 12i = 13e^{i\varphi + k\cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Damit bekommen wir:

$$z = \sqrt[3]{13}e^{i\frac{\varphi}{3} + k\frac{2\pi}{3}i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

In Exponential-/Polar- und kartesischer Form sind die drei Lösungen

$$z = \begin{cases} \sqrt[3]{13}e^{i\frac{\varphi}{3} - k\frac{2\pi}{3}i} = \sqrt[3]{13}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} - \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -0.309 - 2.331i & k = -1, \\ \sqrt[3]{13}e^{i\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{13}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right) = 2.173 + 0.898i, & k = 0, \\ \sqrt[3]{13}e^{i\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{13}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1.864 + 1.433i & k = 1. \end{cases}$$

c) $z^6 = \sqrt{3} + i$:
Exponentialform:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{3+1} = 2, \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \\ \sqrt{3} + i &= 2e^{i\frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi i}. \end{aligned}$$

Damit ist die Lösung in der Exponentialdarstellung:

$$z = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{36} + k\cdot\frac{\pi}{3} i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Exponential-/Polar- und kartesische Form der sechs Lösungen lauten:

$$z = \begin{cases} = \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{35\pi}{36}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{35\pi}{36}\right) + i\sin\left(-\frac{35\pi}{36}\right)\right) = -1.118 - 0.098i & k = -3, \\ = \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{23\pi}{36}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{23\pi}{36}\right) + i\sin\left(-\frac{23\pi}{36}\right)\right) = -0.474 - 1.017i & k = -2, \\ = \sqrt[6]{2} e^{-i\frac{11\pi}{36}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{36}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{36}\right)\right) = 0.644 - 0.919i & k = -1, \\ = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{\pi}{36}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{36}\right)\right) = 1.118 + 0.098i & k = 0, \\ = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{13\pi}{36}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{36}\right)\right) = 0.474 + 1.017i & k = 1, \\ = \sqrt[6]{2} e^{i\frac{25\pi}{36}} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{25\pi}{36}\right) + i\sin\left(\frac{25\pi}{36}\right)\right) = -0.644 + 0.919i & k = 2. \end{cases}$$

d) $z^{12} = -64\left(1 - \sqrt{3}i\right) = 2^6\left((-1 + \sqrt{3}i\right)$:
Exponentialform:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{2^{12}(1+3)} = \sqrt{2^{14}} = 2^7 = 128, \\ \varphi &= \arccos\left(\frac{-2^6}{2^7}\right) = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}, \\ -64\left(1 - \sqrt{3}i\right) &= 2^7 e^{i\frac{2\pi}{3} + k\cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Lösung in der Exponentialdarstellung:

$$z = \sqrt[12]{2^7} e^{i\frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{6} i}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

In Exponential-/Polar- und kartesischer Form sind die zwölf (!) Lösungen:

$$z = \begin{cases} \sqrt[12]{2^7}e^{-i\frac{17\pi}{18}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{17\pi}{18}\right)\right) = -1.476 - 0.260i & k=-6, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{-i\frac{7\pi}{9}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{9}\right)\right) = -1.148 - 0.963i & k=-5, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{-i\frac{11\pi}{18}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(-\frac{11\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{11\pi}{18}\right)\right) = -0.512 - 1.408i & k=-4, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{-i\frac{4\pi}{9}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{4\pi}{9}\right)\right) = 0.260 - 1.476i & k=-3, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{-i\frac{5\pi}{18}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{18}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{18}\right)\right) = 0.963 - 1.148i & k=-2, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{-i\frac{\pi}{9}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{9}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{9}\right)\right) = 1.408 - 0.512i & k=-1, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{i\frac{\pi}{18}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(\frac{\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{18}\right)\right) = 1.476 + 0.260i & k=0, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{i\frac{2\pi}{9}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{9}\right)\right) = 1.148 + 0.963i & k=1, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{i\frac{7\pi}{18}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{18}\right)\right) = 0.512 + 1.408i & k=2, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{i\frac{5\pi}{9}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\right) = -0.260 + 1.476i & k=3, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{i\frac{13\pi}{18}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{18}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{18}\right)\right) = -0.963 + 1.148i & k=4, \\ \sqrt[12]{2^7}e^{i\frac{8\pi}{9}} = \sqrt[12]{2^7}\left(\cos\left(\frac{8\pi}{9}\right) + i\sin\left(\frac{8\pi}{9}\right)\right) = -1.408 + 0.512i & k=5, \end{cases}$$

Lösung 4:

Wir schreiben das Polynom zu

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3+1)^2$$

um. Daraus folgt, dass wir die Gleichung

$$z^3 = -1$$

lösen müssen. Wir schreiben -1 in Exponentialdarstellung:

$$-1 = e^{i\pi + k\cdot 2\pi i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist

$$z = e^{i\frac{\pi}{3} + k\cdot\frac{2\pi}{3}i} = \begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i & k=-1, \\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i & k=0, \\ \cos(\pi) + i\sin(\pi) = -1 & k=1. \end{cases}$$

Wir können also das Polynom wiefolgt in Faktoren zerlegen:

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z^3+1)^2 = (z+1)^2\left(z - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2\left(z - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2.$$

Möchte man eine Zerlegung in ausschließlich reelle Faktoren, erhält man:

$$z^6 + 2z^3 + 1 = (z+1)^2(z^2 - z + 1)^2$$

Wir stellen zwei Dinge fest:

- Das Polynom 6. Ordnung hat 3 Nullstellen, wobei alle Nullstellen aber doppelt auftreten (algebraische Vielfachheit). Insgesamt sind es also wie erwartet 6 Nullstellen.
- Die imaginären Nullstellen sind paarweise zueinander komplex konjugierte Zahlen. Dies ist allgemein der Fall für Polynome, bei denen alle Koeffizienten in $\mathbb{R}$ sind.

2. Variante:

Durch scharfes Hinsehen kann man direkt die Nullstelle $z = -1$ erkennen, denn

$$(-1)^6 + 2(-1)^3 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0.$$

Somit kann man das Polynom durch den Faktor $(z + 1)$ dividieren (Polynomdivision). Man bekommt:

$$\left(z^6 + 2z^3 + 1\right) : (z + 1) = z^5 - z^4 + z^3 + z^2 - z + 1.$$

Hier sieht man nochmals die Lösung $z = -1$, denn

$$(-1)^5 - (-1)^4 + (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) = -1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 0.$$

Also teilt man nochmals durch $z + 1$ und erhält:

$$(z^5 - z^4 + z^3 + z^2 - z + 1) : (z + 1) = z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 1.$$

Jetzt haben wir das Polynom wenigstens auf ein Polynom 4. Grades reduziert. Wenn wir nun keine weiteren Lösungen kennen oder durch Probieren herausfinden, kann man einzig numerisch weiterrechnen (z.B. mit dem Newtonverfahren). Es kommt recht häufig vor, dass man von einem Polynom höheren Grades eine Nullstelle schon kennt oder durch Probieren findet. Dann ist es ratsam die Polynomdivision durchzuführen, wodurch sich der Grad des Polynoms um eins reduziert.

3. Variante:

Man kann $w = z^3$ in der Gleichung substituieren und erhält zum Warmwerden eine quadratische Gleichung

$$w^2 + 2w + 1 = 0.$$

Diese hat eine einzige reelle Nullstelle, nämlich $w = -1$, denn die Diskriminante in der Mitternachtsformel ist $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{4 - 4} = 0$. Damit landen wir wieder bei der Gleichung $z^3 = w = -1$ aus der 1. Lösungsvariante.

Lösung 5:

Wir fassen die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ als Modell für den $\mathbb{R}^2$ auf und die Eckpunkte des regulären 6-Ecks als Lösungen einer Gleichung von der Form $z^6 = c$. Der Mittelpunkt des 6-Ecks ist aber $M(5|3)$. Wir fassen den Verbindungsvektor

$$\overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

als die komplexe Zahl $z_1 = 4 - 3i$ auf. Dies ist also die erste der sechs Lösungen. In Exponentialdarstellung ist

$$|z_1| = 5, \qquad \varphi = \arg z_1 = -\arccos\left(\frac{4}{5}\right) \approx -0.6435,$$
$$z_1 = 5e^{i\varphi}.$$

Um die restlichen Eckpunkte zu bekommen addieren wir Vielfache von $\frac{\pi}{3}$. Wir bekommen die 6 komplexen Zahlen

$$\begin{aligned}
z_1 &= 5e^{i\varphi} = 4 - 3i,\\
z_2 &= 5e^{i\varphi + \frac{\pi}{3}i} = \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) i,\\
z_3 &= 5e^{i\varphi + \frac{2\pi}{3}i} = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\right) + \left(\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}\right) i,\\
z_4 &= 5e^{i\varphi + \pi i} = -4 + 3i,\\
z_5 &= 5e^{i\varphi - \frac{2\pi}{3}i} = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2} - 2\right) + \left(\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}\right) i,\\
z_6 &= 5e^{i\varphi - \frac{\pi}{3}i} = \left(2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-2\sqrt{3} - \frac{3}{2}\right) i.
\end{aligned}$$

Um die Eckpunkte zu berechnen, muss man den Ortsvektor von $M(5|3)$ wieder addieren. Somit erhalten wir für die Eckpunkte:

$$\begin{aligned}
&A(9|0), \qquad && B(7 + \frac{3\sqrt{3}}{2}|2\sqrt{3} + \frac{3}{2}), \qquad && C(3 + \frac{3\sqrt{3}}{2}|\frac{9}{2} + 2\sqrt{3}),\\
&D(1|6), && E(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}|\frac{9}{2} - 2\sqrt{3}), && F(7 - \frac{3\sqrt{3}}{2}|\frac{3}{2} - 2\sqrt{3}).
\end{aligned}$$