Blatt 21: Diagonalisierung — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Matrix A zur Abbildung $f(x_1,x_2)=(x_1+x_2, 2\,x_2)$ bezüglich der Basen $\mathcal{V}$ und $\mathcal{W}$ mit

$$\mathcal{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right\} \quad \text{und} \quad \mathcal{W}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

Zeichnen Sie ein kommutatives Diagramm und machen Sie eine Stichprobe.

Aufgabe 2:

Es sei $f\in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^3)$ mit

$$f(x)=\begin{pmatrix}-2\,x_1+x_2-x_3\\ x_1-2\,x_2-x_3\\ -x_1-x_2-2\,x_3\end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Matrix A zur Abbildung f bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{K}=\{e_1,e_2,e_3\}$.

(b) Berechnen Sie die Matrix B zur Abbildung f bezüglich der Basis

$$\mathcal{V}=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

(Wenn nur eine Basis angegeben ist so gilt diese automatisch für Urbild- und Bildraum der Abbildung.)

(c) Berechnen Sie den Basiswechsel von Basis $\mathcal{K}$ zu Basis $\mathcal{V}$, d.h. Berechnen Sie die Matrix B zur Abbildung $\mathcal{A}(x)=A\,x$ bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ aus (b).

Tipp: Zeichnen Sie zur jeweiligen Situation ein kommutatives Diagramm.

Aufgabe 3:

Es sei $\mathbb{P}_n$ der Vektorraum der Polynome $p(x)$ vom Grade höchstens n. Sei $f\in \mathrm{Hom}(\mathbb{P}_2,\mathbb{P}_3)$ mit

$$f(p(x))=x\cdot p(x).$$

Für die Vektorräume seien die Basen

$$\mathcal{P}_2=\{1,x,x^2\} \quad \text{und} \quad \mathcal{P}_3=\{1,x,x^2,x^3\}$$

gegeben.

(a) Bestimmen Sie die Matrix A, die der linearen Abbildung f zugeordnet ist bezüglich der Basen $\mathcal{P}_2$ und $\mathcal{P}_3$.

(b) Es sei $p(x) = c_0 + c_1\,x + c_2\,x^2 \in \mathbb{P}_2$ gegeben. Berechnen Sie $q(x) = f(p(x))$. Berechnen Sie die Koordinatenvektoren α_p und β_q von $p(x)$ und $q(x) = f(p(x))$ bezüglich der zugehörenden Basen.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass $\beta_q = A\,\alpha_p$ gilt.

Aufgabe 4:

Es sei $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\mathcal{A}(x) = A\,x$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3 von A.

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren $\{v_1, v_2, v_3\}$ von A.

(c) Berechnen Sie die Matrix D zur ABbildung $\mathcal{A}$ bezüglich der Basis, bestehend aus Eigenvektoren von A. Fällt Ihnen was auf?

Lösung 1:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ \Phi_{\mathcal{V}}\downarrow & & \downarrow\Phi_{\mathcal{W}} \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

$$\Phi_{\mathcal{V}}(x) = T\,x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} x = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_{\mathcal{W}}(x) = S\,x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} x = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$i = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = f(v_1) = A_{11}w_1 + A_{21}w_2 = S^{-1}\begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$i = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = f(v_2) = A_{12}w_1 + A_{22}w_2 = S^{-1}\begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Stichprobe: Für $a = \binom{2}{-3}$ ist $f(a) = \binom{-1}{-6}$. Der Koordinatenvektor α von a bezüglich der Basis $\mathcal{V}$ lautet $\alpha = T\,a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\binom{2}{-3} = \frac{1}{2}\binom{4}{-5}$. Darauf wenden wir A an und erhalten $\beta = A\,\alpha = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\binom{4}{-5} = \binom{11}{-6}$. Dies ist nun der Koordinatenvektor von b bezüglich der Basis $\mathcal{W}$. Es ist dann $b = S^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\binom{11}{-6} = \binom{-1}{-6}$ was gerade gleich $f(a)$ ist. Bueno.

Lösung 2:

(a)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \mathrm{Id}\,(x)\downarrow & & \downarrow\mathrm{Id}\,(x) \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Basis:

$$\mathcal{K} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$i = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = f(e_1) = A_{11}\, e_1 + A_{21}\, e_2 + A_{31}\, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} \\ A_{21} \\ A_{31} \end{pmatrix}$$

$i = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = f(e_2) = A_{12}\, e_1 + A_{22}\, e_2 + A_{32}\, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{12} \\ A_{22} \\ A_{32} \end{pmatrix}$$

$i = 3$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = f(e_3) = A_{13}\, e_1 + A_{23}\, e_2 + A_{33}\, e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{13} \\ A_{23} \\ A_{33} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ \Phi_{\mathcal{V}}\downarrow & & \downarrow\Phi_{\mathcal{V}} \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Basis:

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\Phi_{\mathcal{V}}(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}}_{=:T} x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

$i = 1$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = f(v_1) = B_{11} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + B_{21} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + B_{31} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$i = 2$

$$\begin{pmatrix} B_{12} \\ B_{22} \\ B_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$i = 3$

$$\begin{pmatrix} B_{13} \\ B_{23} \\ B_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^3 \\ E\downarrow & & \downarrow E \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^3 \\ T\downarrow & & \downarrow T \\ \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{B} & \mathbb{R}^3 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} B &= T\,A\,T^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & -3 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Lösung 3:

(a)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_2 & \overset{f}{\longrightarrow} & \mathbb{P}_3 \\ \Phi_{\mathcal{P}_2}\downarrow & & \downarrow\Phi_{\mathcal{P}_3} \\ \mathbb{R}^3 & \overset{A}{\longrightarrow} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

$$f(p(x)) = x \cdot p(x)$$

$$\mathcal{P}_2 = \{p_0, p_1, p_2\} = \{1, x, x^2\}$$
$$\mathcal{P}_3 = \{q_0, q_1, q_2, q_3\} = \{1, x, x^2, x^3\}$$

$$\begin{aligned} x &= f(p_0) = A_{00}\, q_0 + A_{10}\, q_1 + A_{20}\, q_2 + A_{30}\, q_3 = A_{00}\, 1 + A_{10}\, x + A_{20}\, x^2 + A_{30}\, x^3 \\ x^2 &= f(p_1) = A_{01}\, 1 + A_{11}\, x^1 + A_{21}\, x^2 + A_{31}\, x^3 \\ x^3 &= f(p_2) = A_{02}\, 1 + A_{12}\, x^1 + A_{22}\, x^2 + A_{32}\, x^3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Es sei $p(x) = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 \in \mathbb{P}_2$ gegeben. Berechnen Sie $q(x) = f(p(x))$.

$$q(x) = f(p(x)) = x \cdot p(x) = c_0 x + c_1\, x^2 + c_2\, x^3$$

$$\alpha_p = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \beta_q = \begin{pmatrix} 0 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

(c)

$$A\,\alpha_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Lösung 4:

Es sei $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\mathcal{A}(x) = A\,x$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix} .$$

(a)

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1 \\ \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_3 &= -1 \end{aligned}$$

(b)

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \; v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} , \; v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(c) Mit

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} D = T\,A\,T^{-1} &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$