Blatt 20: Darstellung bez. verschiedener Basen — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $a = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis

$$\mathcal{V} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie den Koordinatenvektor von $p(x) = 3\,x^3 - 10\,x + 2 \in \mathbb{P}_4$ bezüglich der Basis

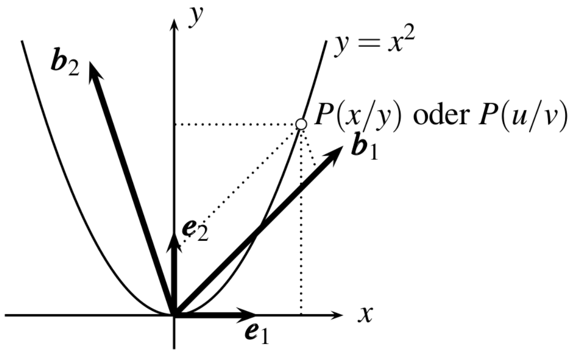
$$\mathcal{P} = \{3, 2\,x, -5\,x^2, 4\,x^3\}.$$

Aufgabe 3:

Gegeben sei die natürliche Basis $\mathcal{B}_1 = \{e_1\,,\, e_2\}$ und die Basis $\mathcal{B}_2 = \{b_1\,,\, b_2\}$ des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ein Punkt P hat die Koordinaten x und y bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ und die Koordinaten u und v bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$. (Siehe Abbildung) Wir schreiben dafür $P(x/y)$, resp. $P(u/v)$. Die Koordinaten der Punkte $P(x/y)$ auf einer Parabel bezüglich der Basis $\mathcal{B}_1$ erfüllen die Gleichung: $y = x^2$.
Wie lautet die Koordinatengleichung der Punkte $P(u/v)$ auf der Parabel bezüglich der Basis $\mathcal{B}_2$?



Aufgabe 4: (Saalaufgabe)

Berechnen Sie die Matrix A zur Abbildung $f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, 2\,x_2)$ bezüglich der kanonischen Basis $\mathcal{K} = \{e_1, e_2\}$ und die Matrix $\tilde{A}$ zur gleichen Abbildung bezüglich der Basis $\mathcal{V} = \left\{\binom{1}{1}, \binom{0}{2}\right\}$. Suchen Sie sich einen Punkt im $\mathbb{R}^2$ und prüfen Sie die verschiedenen Wege im kommutativen Diagramm.

Lösung 1:

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Der Koordinatenvektor von $a = \binom{1}{2} \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Basis $\mathcal{V} = \left\{ \binom{-1}{3}, \binom{0}{4} \right\}$ lautet

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}.$$

Lösung 2:

$$p(x) = 3\,x^3 - 10\,x + 2 = \alpha_0\,3 + \alpha_1\,2\,x - \alpha_2\,5\,x^2 + \alpha_3\,4\,x^3$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -5 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 8 \\ -60 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Lösung 3:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,u - v \\ 2\,u + 3\,v \end{pmatrix}$$

$$y = x^2 \quad \Leftrightarrow 2\,u + 3\,v = (2\,u - v)^2 = 4\,u^2 + v^2 - 4\,u\,v \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 4\,u^2 - 2\,u - 4\,u\,v + 3\,v + v^2$$

Lösung 4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \ \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wähle Punkt $x = \binom{1}{1}$. Es ist

$$f(x_1, x_2) = f(1,1) = (2,2)$$

und

$$f(x) = (\Phi_{\mathcal{V}} \circ \tilde{\mathcal{A}} \circ \Phi_{\mathcal{V}}^{-1})(x)\,.$$

Also

$$\begin{aligned} f(1,1) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$