Blatt 19: Eigenwerte und Eigenvektoren — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie λ_1 und λ_2 mit

$$\det(A - \lambda_i E_2) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Diese λ_i sind Eigenwerte der Matrix A.

(b) Sind $\lambda_i \in \mathbb{R}$ Eigenwerte von A so sind die $v_i \in \mathbb{R}^2$ mit $A\,v = \lambda_i\,v$ Eigenvektoren von A zum Eigenwert λ_i. Berechnen Sie zu jedem Eigenwert aus (a) die Menge der zugehörenden Eigenvektoren gemäß (warum?)

$$\operatorname{Kern}\,(A - \lambda_i\,E_2)\,.$$

(c) Überprüfen Sie, ob die von Ihnen berechneten Eigenvektoren die Eigenschaft $A\,v = \lambda\,v$ erfüllen.

Aufgabe 2:

Es sei die Abbildung $\mathcal{A} \in \operatorname{Hom}(\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ mit $\mathcal{A}(x) = A\,x$, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 2+2\,i & -0.5-0.5\,i & 0.5-0.5\,i \\ 3+i & -0.5+0.5\,i & 0.5-1.5\,i \\ -1-i & 0.5+0.5\,i & 0.5+1.5\,i \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte Matrix $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

Tipp: Ein EW ist $\lambda_1 = 2\,i$.

(b) Berechnen Sie die Eigenvektoren der Matrix A zu den jeweiligen Eigenwerten.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass die Eigenräume zu den jeweiligen Eigenwerten eine direkte Summe bilden.

Aufgabe 3:

(a) Damit überhaupt von Eigenwerten einer Abbildung $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ gesprochen werden kann muss f

- ☐ ein Epimorphismus (surjektiv)
- ☐ ein Isomorphismus (bijektiv)
- ☐ ein Endomorphismus ($V = W$) sein.

(b) $v \neq 0$ heißt EV zum $\mathrm{EW}\ \lambda$, wenn $f(v) = \lambda\, v$. Wenn nun statt dessen $f(-v) = \lambda\, v$ gilt, dann ist

- ☐ $-v$ EV zum $\mathrm{EW}\ \lambda$
- ☐ v EV zum $\mathrm{EW}\ -\lambda$
- ☐ $-v$ EV zum $\mathrm{EW}\ -\lambda$

(c) Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$ und λ ein EW von f, so verstehen wir unter dem Eigenraum U_λ von f zum $\mathrm{EW}\ \lambda$

- ☐ die Menge aller EVen zum $\mathrm{EW}\ \lambda$
- ☐ die Menge aller EVen zum $\mathrm{EW}\ \lambda$ und der Nullvektor
- ☐ $\mathrm{Kern}\ (\lambda\,\mathrm{Id}\,)$

(d) Welcher der folgenden drei Vektoren ist EV von

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\,?$$

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(e) Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, V)$, $\dim V = n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ verschiedene EWe von f. Dann gilt:

- ☐ $\dim\, U_{\lambda_1} + \cdots + \dim\, U_{\lambda_r} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$
- ☐ $\dim\, U_{\lambda_1} + \cdots + \dim\, U_{\lambda_r} \leq n$
- ☐ $\dim\, U_{\lambda_1} + \cdots + \dim\, U_{\lambda_r} > n$

(f) Das charakteristische Polynom von

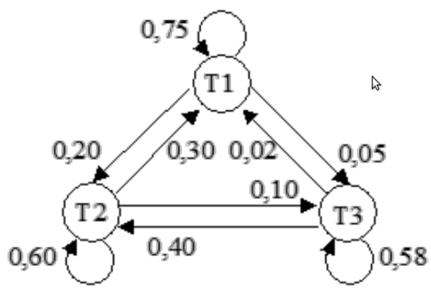
$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x$$

ist gegeben durch

- ☐ $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 6$
- ☐ $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 6$
- ☐ $p(\lambda) = -\lambda + 7$

Aufgabe 4:

Geben Sie die Matrix A an, die folgendes Übregangsdiagramm darstellt.



Welchen stationären Zustand $x^\star$ mit

$$x^\star = A\,x^\star$$

erhalten Sie? Angenommen es handelt sich bei diesem Übergangsdiagramm um die Entwicklung von Kundenzugehörigkeiten verschiedener Tarifgruppen einer Versicherungsgesellschaft, wieviele Kunden wählen langfristig den Tarif T2, wenn insgesamt 3400 Kunden versichert sind?

Aufgabe 5:

Ein Schmetterling legt 12 Eier und stirbt dann. Von den Eiern entwickeln sich 25% zu einer Raupe. Von den Raupen gelingt es einem Drittel, zu einem Schmetterling heranzuwachsen, der wiederum in der Lage ist, 12 Eier zu legen.

Gibt es eine Population, die sich von Generation zu Generation nicht verändert?

Lösung 1:

Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} .$$

(a)

$$\det(A - \lambda\, E) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & 8-\lambda \end{pmatrix} = (\lambda-5)(\lambda-6) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in \{5, 6\}$$

(b)

$$\begin{aligned} \text{Kern}\,(A - \lambda_1\, E) &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} t\,,\ t \in \mathbb{R} \right\} \\ \text{Kern}\,(A - \lambda_2\, E) &= \text{Kern} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} t\,,\ t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

(c) Test

$$\begin{aligned} A\, v_1 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1\, v_1 \\ A\, v_2 &= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 18 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda_2\, v_2 \end{aligned}$$

Lösung 2:

(a) <u>Eigenwerte:</u>

$$\det\,(A - \lambda\, E_3) = -\lambda^3 + \lambda^2\,(4\,i + 2) + \lambda\,(4 - 6\,i) - 4 = (\lambda - 2\,i)(-\lambda^2 + \lambda\,(2\,i + 2) - 2\,i)$$

Mitternachtsformel:

$$\lambda^2 - \lambda\,(2\,i + 2) + 2\,i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_{2,3} = \frac{2\,i + 2 \pm \sqrt{(2\,i+2)^2 - 8\,i}}{2} = 1 + i$$

Es gibt demnach zwei EWe: $\lambda_1 = 2\,i$ und $\lambda_2 = 1 + i$.

(b) <u>Eigenvektoren zu $\lambda_1 = 2\,i$:</u>

$$2\,(A-\lambda_1\,E_3) = \begin{pmatrix} 4 & -1-i & 1-i \\ 6+2\,i & -1-3\,i & 1-3\,i \\ -2-2\,i & 1+i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{II+2 III}]{\text{(III-I)/2}} \begin{pmatrix} 4 & -1-i & 1-i \\ 0 & 1-i & 1-3\,i \\ -3-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{(3+i) I+4 III}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4-2\,i \\ 0 & 1-i & 1-3\,i \\ -3-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{2 II-(1-i) I}} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4-2\,i \\ 0 & 0 & 0 \\ -3-i & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich der Eigenraum

$$U_{2\,i} = \left\{ v \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} -1 \\ i-2 \\ 1 \end{pmatrix} t\,,\; t \in \mathbb{C} \right\}.$$

<u>Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 1+i$:</u>

$$2\,(A-\lambda_2\,E_3) = \begin{pmatrix} 2+2\,i & -1-i & 1-i \\ 6+2\,i & -3-i & 1-3\,i \\ -2-2\,i & 1+i & -1+i \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\text{(1-i) II-(1-3 i) I}]{\text{III+I}} = \begin{pmatrix} 2+2\,i & -1-i & 1-i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich der Eigenraum

$$U_{1+i} = \left\{ v \in \mathbb{C}^3 \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} s\,,\; t,s \in \mathbb{C} \right\}.$$

(c) Da

$$\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ i-2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = -2-2\,i \neq 0$$

gilt, bilden die Eigenräume eine direkte Summe und es gilt

$$U_{2\,i} \oplus U_{1+i} = \mathbb{C}^3\,.$$

Lösung 3:

(a) Damit überhaupt von Eigenwerten einer Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(V, W)$ gesprochen werden kann muss f

- ☐ ein Epimorphismus (surjektiv)
- ☐ ein Isomorphismus (bijektiv)
- ☒ ein Endomorphismus ($V = W$) sein.

(b) $v \neq 0$ heißt EV zum $\mathrm{EW}\ \lambda$, wenn $f(v) = \lambda\, v$. Wenn nun statt dessen $f(-v) = \lambda\, v$ gilt, dann ist

- ☐ $-v$ EV zum $\mathrm{EW}\ \lambda$
- ☐ v EV zum $\mathrm{EW}\ -\lambda$
- ☒ $-v$ EV zum $\mathrm{EW}\ -\lambda$

(c) Ist $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$ und λ ein EW von f, so verstehen wir unter dem Eigenraum U_λ von f zum $\mathrm{EW}\ \lambda$

- ☐ die Menge aller EVen zum $\mathrm{EW}\ \lambda$
- ☒ die Menge aller EVen zum $\mathrm{EW}\ \lambda$ und der Nullvektor
- ☐ $\operatorname{Kern}\ (\lambda \operatorname{Id})$

(d) Welcher der folgenden drei Vektoren ist EV von

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\,?$$

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ☒ $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(e) Sei $f \in \operatorname{Hom}(V, V)$, $\dim V = n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ verschiedene EWe von f. Dann gilt:

- ☐ $\dim\, U_{\lambda_1} + \cdots + \dim\, U_{\lambda_r} = \lambda_1 + \cdots + \lambda_r$
- ☒ $\dim\, U_{\lambda_1} + \cdots + \dim\, U_{\lambda_r} \leq n$
- ☐ $\dim\, U_{\lambda_1} + \cdots + \dim\, U_{\lambda_r} > n$

(f) Das charakteristische Polynom von

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} x$$

ist gegeben durch

- ☐ $p(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 6$
- ☒ $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 6$
- ☐ $p(\lambda) = -\lambda + 7$

Lösung 4:

Es ist

$$A = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.3 & 0.02 \\ 0.2 & 0.6 & 0.4 \\ 0.05 & 0.1 & 0.58 \end{pmatrix} .$$

Wir berechnen den Kern von $A - E_3$ und bringen dazu die Matrix $100\,(A - E_3)$ (ohne Brüche geht's besser) auf Stufenform:

$$\begin{pmatrix} -25 & 30 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & 10 & -42 \end{pmatrix} \underset{(5\,\mathrm{III}+\mathrm{I})/4+4\,\mathrm{II}}{\overset{(25\,\mathrm{II}+\mathrm{I})/4}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} -25 & 30 & 2 \\ 0 & -5 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit erhalten wir den Unterraum

$$U_1 = \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} t\,,\ t \in \mathbb{R} \right\} .$$

Bei insgesamt 3400 Kunden verteilen sich die Gruppen zu

$$v = \begin{pmatrix} 16 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix} \frac{3400}{16+13+5} = \begin{pmatrix} 1600 \\ 1300 \\ 500 \end{pmatrix} .$$

Es werden also langfristig 1300 Personen bei Tarifgruppe T2 versichert sein.

Lösung 5:

$$\left.\begin{array}{rcl} e & = & 12\,s \\ r & = & \frac{1}{4}\,e \\ 2 & = & \frac{1}{3}\,r \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} e \\ r \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 12 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ r \\ s \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 12 \\ \frac{1}{4} & -\lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 1$$

Eigenvektor:

$$\begin{aligned} \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} &= \mathrm{Kern} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left\{ v \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; v = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} s\,,\ s \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass 12 Eier, 3 Schmetterlinge und 1 Raupe als Bestand Beständigkeit zeigen wird.