Blatt 18: Bild, Kern und Bijektivität von Abbildungen MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Eine Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn

- ☐ $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ für alle $x, y \in V$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$
- ☐ f eine Matrix ist
- ☐ $\mathrm{Bild}\, f \subset W$ ein Untervektorraum von W ist.

Aufgabe 2:

Unter dem Kern von $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ versteht man

- ☐ $\{w \in W \mid f(0) = w\}$
- ☐ $\{f(v) \mid v = 0\}$
- ☐ $\{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Aufgabe 3:

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so gilt

- ☐ $f(0) = 0$
- ☐ $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in V$
- ☐ $f(\lambda v) = f(\lambda) + f(v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$.

Aufgabe 4:

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt Isomorphismus, wenn

- ☐ es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{Id}_W$, $g \circ f = \mathrm{Id}_V$
- ☐ V und W isomorph sind.
- ☐ $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ für jedes n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von W ist.

Aufgabe 5:

Unter dem Rang $\mathrm{Rg}\, f$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ versteht man

- ☐ $\dim \mathrm{Kern}\, f$
- ☐ $\dim \mathrm{Bild}\, f$
- ☐ $\dim W$

Aufgabe 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7:

Die Abbildung

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \mapsto (x + y, y - x)$$

ist durch die folgende Matrix gegeben

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 8:

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn

- ☐ f surjektiv ist
- ☐ $\dim \mathrm{Kern}\, f = 0$
- ☐ $\mathrm{Rg}\, f = 0$

Aufgabe 9:

Es seien V und W zwei dreidimensionale Vektorräume mit Basen (v_1, v_2, v_3) und (w_1, w_2, w_3) und es sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$. Welche der folgenden Matrizen könnte die zu f gehörige Matrix sein?

$$\square \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 10:

Es sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ein Epimorphismus und $\dim V = 5$, $\dim W = 3$. Dann ist

- ☐ $\dim \mathrm{Kern}\, f \geq 3$
- ☐ $\dim \mathrm{Kern}\, f$ null, eins oder zwei; jeder dieser Fälle kann vorkommen
- ☐ $\dim \mathrm{Kern}\, f = 2$

Aufgabe 11:

Untersuchen Sie folgende Abbildungen auf Linearität:

$$(a) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x^2 \\ x + y \end{pmatrix} \quad (b)\ (x, y) \mapsto (x - y, y - x + 1)$$

Aufgabe 12:

Welches ist die Abbildungsmatrix der linearen Abbildung

$$\mathcal{A} :\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y + 2\,z \\ z \end{pmatrix} ?$$

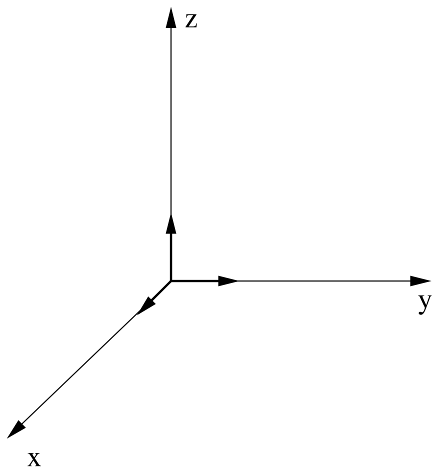
Aufgabe 13:

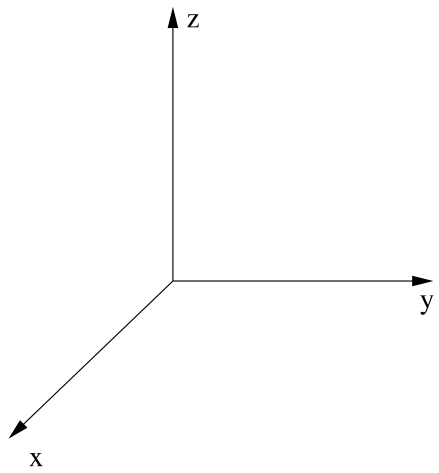
Es sei

$$\begin{aligned}\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3\\ x &\mapsto \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} x\end{aligned}$$

eine lineare Abbildung.

(a) Was ist das Bild von $\mathcal{A}$? Machen Sie eine Skizze.





(b) Welche Dimension hat der Bildraum?

(c) Wie lautet dir Koordinatengleichung des Bildraumes?

Aufgabe 14:

Der Bildraum der Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix} x$$

ist eine Ebene.

(a) Welches ist das Erzeugendensystem des Bildraumes?

(b) Geben Sie eine Basis des Bildraumes an.

(c) Welches ist der Kern der Abbildung?

(d) Geben Sie den Bildraum als Koordinatengleichung an. (Soll ja eine Ebne im $\mathbb{R}^3$ sein!)

Aufgabe 15:

Sei $\mathcal{K} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\mathcal{A}(x) = A\,x$.

(a) Bestimmen Sie die Matrix A der linearen Abbildung mit

$$\mathcal{A}(\mathrm{e}_1) = \mathrm{e}_1 + \mathrm{e}_2\,, \quad \mathcal{A}(\mathrm{e}_2) = -2\,\mathrm{e}_1 - 3\,\mathrm{e}_2 + \mathrm{e}_3\,, \quad \mathcal{A}(\mathrm{e}_3) = \mathcal{A}(\mathrm{e}_1) \times \mathrm{e}_3\,.$$

(b) Auf welchen Vektor wird der Vektor $v = (1, 2, 3)^T$ abgebildet?

(c) Bestimmen Sie den Unterraum $\mathrm{Kern}\,\mathcal{A}$.

(d) Was ist die Dimension des Bidlraums?

(e) Bestimmen Sie den Unterraum $\mathrm{Bild}\,\mathcal{A}$.

Aufgabe 16:

Gegeben sei $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit

$$\mathcal{A}(x) = A\,x\,, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

Der Bildraum ist zweidimensional. Überprüfen Sie dies und stellen Sie die entsprechende Ebene in Koordinatenform auf.

Aufgabe 17:

Berechnen Sie die Matrix A der linearean Abbildung $\mathcal{A}(x) = A\,x$, welcher folgender Abbildungsvorschriften genügt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 18:

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\,.$$

Es sei $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_1 = 0\}$. Wie lautet die Koordinatengleichung der Menge

$$\mathcal{A}(E) = \{\mathcal{A}(x) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in E\}\,?$$

Aufgabe 19:

Gesucht ist die Matrix A der linearen Abbildung $\mathcal{A}:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{A}(x) = A\,x$, die als Bildraum $\operatorname{Bild} \mathcal{A}$ den Unterraum $\operatorname{Span}\left(()\, a, b, c\right)$ hat mit

$$a = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix},\ c = \begin{pmatrix} -7 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 20:

Bestimmen Sie den Rang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$$

mit elementaren Spaltenumformungen.

Lösung 1:

Eine Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn

- ☒ $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ für alle $x, y \in V$, $\lambda\mu \in \mathbb{K}$
- ☐ f eine Matrix ist
- ☐ $\mathrm{Bild}\, f \subset W$ ein Untervektorraum von W ist.

Lösung 2:

Unter dem Kern von $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ versteht man

- ☐ $\{w \in W \mid f(0) = w\}$
- ☐ $\{f(v) \mid v = 0\}$
- ☒ $\{v \in V \mid f(v) = 0\}$

Lösung 3:

Welche der folgenden Aussagen sind richtig? Ist $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so gilt

- ☒ $f(0) = 0$
- ☒ $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in V$
- ☐ $f(\lambda v) = f(\lambda) + f(v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \in V$.

Lösung 4:

$f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ heißt Isomorphismus, wenn

- ☒ es eine lineare Abbildung $g : W \to V$ gibt mit $f \circ g = \mathrm{Id}_W$, $g \circ f = \mathrm{Id}_V$
- ☒ V und W isomorph sind.
- ☐ $(f(v_1), \dots, f(v_n))$ für jedes n-Tupel $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von W ist.

Lösung 5:

Unter dem Rang $\mathrm{Rg}\, f$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ versteht man

- ☐ $\dim \mathrm{Kern}\, f$
- ☒ $\dim \mathrm{Bild}\, f$
- ☐ $\dim W$

Lösung 6:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

☒ $\binom{2}{6}$ ☐ $\binom{5}{-3}$ ☐ $\binom{0}{2}$

Lösung 7:

Die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + y, y - x) \end{aligned}$$

ist durch die folgende Matrix gegeben

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung 8:

Eine lineare Abbildung $f : V \to W$ ist genau dann injektiv, wenn

- ☐ f surjektiv ist
- ☒ $\dim \mathrm{Kern}\, f = 0$
- ☐ $\mathrm{Rg}\, f = 0$

Lösung 9:

Es seien V und W zwei dreidimensionale Vektorräume mit Basen (v_1, v_2, v_3) und (w_1, w_2, w_3) und es sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ mit $f(v_i) = w_i$. Welche der folgenden Matrizen könnte die zu f gehörige Matrix sein?

$\square$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\boxtimes$ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$ $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Lösung 10:

Es sei $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ ein Epimorphismus und $\dim V = 5$, $\dim W = 3$. Dann ist

$\square$ $\dim \mathrm{Kern}\, f \geq 3$
$\square$ $\dim \mathrm{Kern}\, f$ null, eins oder zwei; jeder dieser Fälle kann vorkommen
$\boxtimes$ $\dim \mathrm{Kern}\, f = 2$

Lösung 11:

(a) nicht linear (b) nicht linear

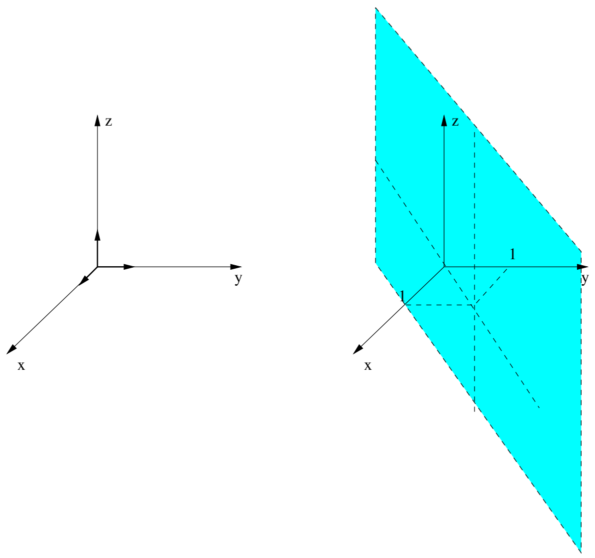
Lösung 12:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösung 13:

(a)

$$\mathrm{Bild}\, \mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s\,,\ t, s \in \mathbb{R} \right\}$$



(b) $\dim \operatorname{Bild} \mathcal{A} = 2$

(c) $x_1 - x_2 = 0$

Lösung 14:

Der Bildraum der Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} x$$

ist eine Ebene.

(a) Das Erzeugendensystem des Bildraumes ist gegeben durch die Spaten der abbildenden Matrix A:

$$\operatorname{Span}(=) \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

(b) Eine Basis sind die linear unabhängigen Vektoren des Erzeugendensystems, bzw. die linear unabhängigen Spaltenvektoren von A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{II-3I, (III+II)}]{\text{III+I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich die Basis

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

(c) Der Kern ist die Lösung des LGS $Ax = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III-2I)/3,(III+II)}]{\text{(II-2I)/(-5)}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Kern}\,\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\,,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

(d)

$$-4\,x_1 - 3\,x_2 + 5\,x_3 = 0$$

Lösung 15:

(a)

$$\mathcal{A}(e_1) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\,,\ \mathcal{A}(e_2) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}\,,$$

$$\mathcal{A}(e_3) = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)

$$A\,v = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-4+3 \\ 1-6-3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(c) Gesucht ist die Lösungsmenge des homogenen LGS $A\,x = 0$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III+II)/(-2)}]{\text{II-I}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \text{Kern}\,\mathcal{A} = \{0\}$$

(d)

$$\dim \text{Bild}\,\mathcal{A} = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \text{Kern}\,\mathcal{A} = 3$$

(e)

$$\text{Bild}\,\mathcal{A} = \text{Span}\left(s\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right) = \mathbb{R}^3$$

Lösung 16:

$$\begin{pmatrix}2 & -3 & -7\\ 1 & 4 & 2\\ -2 & 5 & 9\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{2 II-I}]{\text{III+I}} \begin{pmatrix}2 & -3 & -7\\ 0 & 11 & 11\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III-II)}]{\text{II/11, III/2}} \begin{pmatrix}\boxed{2} & -3 & -7\\ 0 & \boxed{1} & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \dim\text{Kern}\,\mathcal{A} = 1 \qquad \text{und} \qquad \dim\text{Bild}\,\mathcal{A} = \dim\mathbb{R}^3 - \dim\text{Kern}\,\mathcal{A} = 2$$

Das Bild von $\mathcal{A}$ wird aufgespannt von dem ersten und zweiten Spaltenvektor in A (siehe Pivotelement) und ergibt sich zunächst in Parameterform zu

$$\text{Bild}\,\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} t + \begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix} s\,,\ t,s \in \mathbb{R} \right\}$$

und in Koordinatengleichung

$$\begin{aligned}
\text{Bild}\,\mathcal{A} &= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle x, \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-3\\4\\5\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left\langle x, \begin{pmatrix}13\\-4\\11\end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 13\,x_1 - 4\,x_2 + 11\,x_3 = 0 \right\}
\end{aligned}$$

Lösung 17:

Es gilt

$$\begin{pmatrix}a_{11} + 2\,a_{12}\\ a_{21} + 2\,a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}-2\,a_{11} + 2\,a_{12}\\ -2\,a_{21} + 2\,a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}.$$

Zusammengefasst entspricht das mit LGS

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 7\\ -2 & 2 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 2 & -6\end{array}\right) \xrightarrow[\text{(IV+2 III)/6}]{\text{(II+2 I)/6}} \left(\begin{array}{cccc|c}1 & 2 & 0 & 0 & 7\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right).$$

Daraus ergibt sich die Matrix zu

$$A = \begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Lösung 18:

Die Parameterform der Ebene lautet

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s \, , \; t, s \in \mathbb{R} \right\} .$$

Diese multipliziert mit A (und zwar alle Punkte der Ebene) ergibt

$$\mathcal{A}(E) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t+s \\ 2\,t+s \\ 3\,t+4\,s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} s \, .$$

Das Bild ist also wiederum eine Ebene, hier in Parameterform. Die entsprechende Koordinatendarstellung lautet

$$5\,x_2 - x_2 - x_3 = 0$$

Lösung 19:

Die kanonische Basis $\mathcal{K} = \{e_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$ und da

$$\mathcal{A}(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ a_{3i} \end{pmatrix} \, , \; i = 1, 2, 3$$

die i–te Spalte der gesuchten Matrix ergibt, erhalten wir schlicht und damit ergreifend

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -7 \\ 4 & 0 & 12 \\ 2 & 3 & 12 \end{pmatrix} .$$

Lösung 20:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 3 & -1 & -4 \\ 2 & 3 & -4 & -7 & -3 \\ 3 & 8 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV-I+II, (IV-III)}]{\text{III-I, V+II}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{(III-2II)}]{\text{II-3I}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich der Rang der Matrix zu

$$\operatorname{Rg} A = 2 \, .$$