Blatt 17: inverse Abbildungen und Kompositionen MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Dreiecke

$\hat{T}$	gegeben durch die Punkte	$\hat{a} = (0,0)$	$\hat{b} = (1,0)$	$\hat{c} = (0,1)$
T	gegeben durch die Punkte	$a = (-4,2)$	$b = (-3,4)$	$c = (-3,3)$
T'	gegeben durch die Punkte	$a' = (4,4)$	$b' = (2,4)$	$c' = (3,3)$

(a) Wie lautet die Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{A}(x) = A\,x + b_a$, welche das Standarddreick $\hat{T}$ auf das Dreieck T abbildet?

(b) Wie lautet die Abbildung $\mathcal{B} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{B}(x) = B\,x + b_b$, welche das Standarddreick $\hat{T}$ auf das Dreieck T' abbildet?

(c) Wie lautet die Abbildung $\mathcal{C} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\mathcal{C}(x) = C\,x + b_c$, welche das Dreieck T auf das Dreieck T' abbildet?

Aufgabe 2:

Geben Sie jeweils die Streckungs-Abbildungen von $\Omega \to \Omega'$ an.

(a)
$$\Omega = [1,2] \times [-1,3] \quad \text{und} \quad \Omega' = [3,6] \times [-1,3]$$

(b)
$$\Omega = [1,3] \times [-1,3] \quad \text{und} \quad \Omega' = [1,4] \times [-1,3]$$

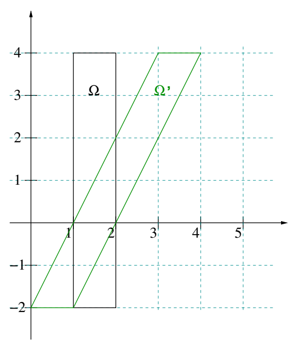
(c)
$$\Omega = [0,1] \times [0,2] \quad \text{und} \quad \Omega' = [0,3] \times [0,1]$$

(d)
$$\Omega = [1,2] \times [1,3] \quad \text{und} \quad \Omega' = [3,6] \times [0.5,1]$$

Aufgabe 3:

Geben Sie jeweils die Scherungs-Abbildungen von $\Omega \to \Omega'$ an.

(a)

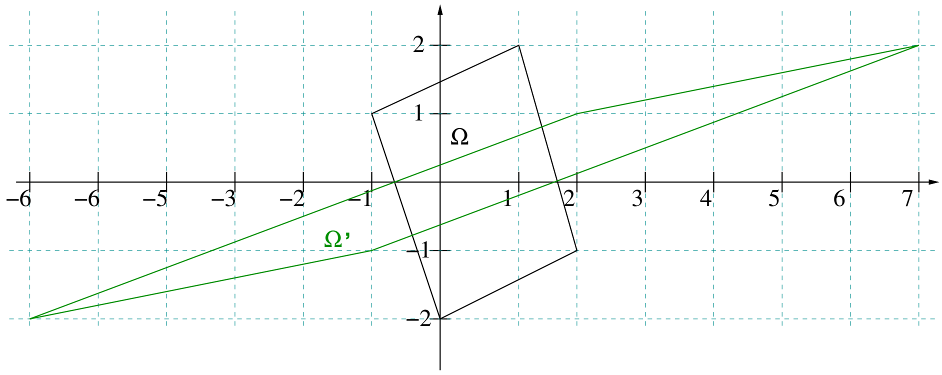


Eine Scherung an der x_1=Achse wird durch folgende Abbildung beschrieben:

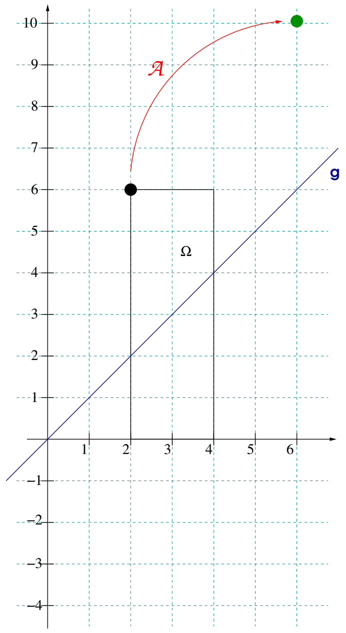
$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie den Wert $\alpha \in \mathbb{R}$ anhand der Abbildung links.

(b) Wie lautet die Scherungsabbildung folgender Situation?



(c)



Berechnen Sie die Abbildung $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass Sie eine Scherung an der Geraden

$$g : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t\,, t \in \mathbb{R}$$

erhalten, wobei

$$\mathcal{A}((2,6)) = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

gelten sollte.
Zerlegen Sie die Abbildung in "Drehung der Gerade g auf die x_1-Achse", dann "Scherung" und anschließend "Drehung zurück auf die Gerade g". Die Gesamtabbildung erhalten Sie dann durch Verknüpfung der drei Einzelabbildungen in der richtigen Reihenfolge!

Aufgabe 4:

Es sei $\mathcal{D} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ eine Drehung um eine beliebige Gerade $g : v\,t, v \in \mathbb{R}^3, t \in \mathbb{R}$ und $\|v\| = 1$ um den Winkel α:

$$\mathcal{D}(x) = v\ < v, x > + \cos\alpha\,(v \times x) \times v + \sin\alpha\,(v \times x)$$

(a) Überzeugen Sie sich davon, dass $D(x) - P(x) \perp g$ gilt, wobei $P(x)$ die orthogonale Projektion von x auf g beschreibt.

(b) Formulieren Sie $\mathcal{D}(x)$ in Matrix-Vektor-Schreibweise $D\,x$.

(c) Wie lautet die Matrix D für die Drehachse gegeben durch die Gerade g : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t$?

Rotieren Sie den Punkt $x = (1, 1, 1)$ um g um den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Lösung 1:

(a)
$$\mathcal{A}(x) = (b-a, c-a)\,x + a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\mathcal{B}(x) = (b'-a', c'-a')\,x + a' = -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\begin{aligned} \mathcal{C}(x) &= (\mathcal{B} \circ \mathcal{A}^{-1})(x) \\ \mathcal{A}^{-1}(x) &= A^{-1}(x - b_a) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -6 \\ 10 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad \mathcal{C}(x) &= -\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathcal{A}^{-1}(x) + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sie können die Ergebnisse prüfen, indem Sie nachrechnen, ob die Dreieckecken korekt abgebildet werden:
$$\mathcal{A}(\hat{a}) = a\,,\ \mathcal{B}(\hat{b}) = b'\,,\ \mathcal{C}(c) = c'\,,\ \text{etc}$$

Der Matlab-Code `MapTri.m`

```
hat_T = [[0 0], [1 0], [0 1]];
T     = [[-4 2]; [-3 4]; [-3 3]]; % T(1,:)=a, T(2,:)=b, T(3,:)=c
Ts    = [[4 4]; [2 4]; [3 3]];

A(:,1) = T(2,:)'-T(1,:)'; % Erste Spalte von A ist b-a
A(:,2) = T(3,:)'-T(1,:)'; % Zweite Spalte von A ist c-a
ba     = T(1,:)';

B(:,1) = Ts(2,:)'-Ts(1,:)'; % Erste Spalte von B ist b'-a'
B(:,2) = Ts(3,:)'-Ts(1,:)'; % Zweite Spalte von B ist c'-a'
bb     = Ts(1,:)';

Ai = inv(A);
C  = B*Ai;
bc = -C*ba+bb;
```

```
CA = @(x) A*x+ba;
CB = @(x) B*x+bb;
CC = @(x) C*x+bc;

fprintf('CA([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',0,0,CA([0; 0]));
fprintf('CA([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',1,0,CA([1; 0]));
fprintf('CA([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',0,1,CA([0; 1]));

fprintf('CB([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',0,0,CB([0; 0]));
fprintf('CB([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',1,0,CB([1; 0]));
fprintf('CB([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',0,1,CB([0; 1]));

fprintf('CC([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',CA([0; 0]),CC(CA([0; 0])));
fprintf('CC([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',CA([1; 0]),CC(CA([1; 0])));
fprintf('CC([%.2f;%.2f]) = %.2f %.2f\n',CA([0; 1]),CC(CA([0; 1])));
```

liefert die Ausgabe

```
>> MapTri
CA([0.00;0.00]) = -4.00 2.00
CA([1.00;0.00]) = -3.00 4.00
CA([0.00;1.00]) = -3.00 3.00
CB([0.00;0.00]) = 4.00 4.00
CB([1.00;0.00]) = 2.00 4.00
CB([0.00;1.00]) = 3.00 3.00
CC([-4.00;2.00]) = 4.00 4.00
CC([-3.00;4.00]) = 2.00 4.00
CC([-3.00;3.00]) = 3.00 3.00
```

Lösung 2:

(a) Streckung in x_1-Richtung:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 3\,x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

(b) Translation um $(-1, 0)$, dann Streckung in x_1-Richtung um Faktor $\frac{3}{2}$ und dann wieder Translation um $(1, 0)$:

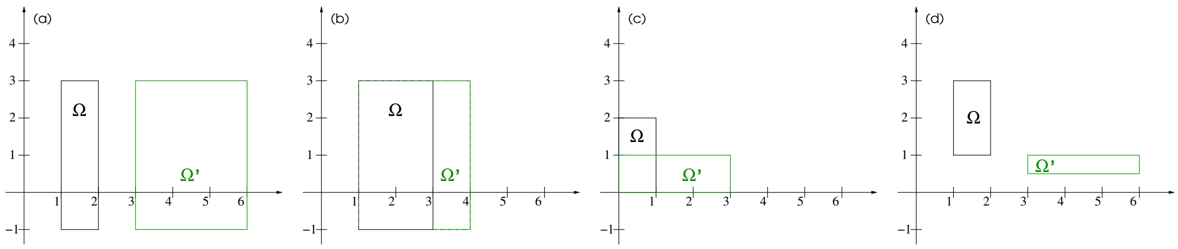
$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \left(x + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) Streckung in x_1-Richtung um Faktor 3 und Streckung in x_2-Richtung um Faktor $\frac{1}{2}$:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} x$$

(d) Translation um $(-1,-1)$, dann Streckung in x_1-Richtung um den Faktor 3 und in x_2-Richtung um den Faktor $\frac{1}{4}$ und anschliešend eine Translation um $(3, \frac{1}{2})$:

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \left(x - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$



Lösung 3:

(a) Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} x_1 + \alpha\, x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

führt auf

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 4\,\alpha \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

also onsgesamt auf die Abbildung

$$\mathcal{A}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x\,.$$

Test:

$$\mathcal{A}((2,4)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{A}((2,0)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{A}((1,-2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

$$\mathcal{A}((2,-2)) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

(b)

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

(c)

Wir drehen das ganze System (Viereck und Gerade) um den Winkel zwischen g und der x_1-Achse

$$\varphi = \arccos\left(\frac{< e_1, v >}{\|v\|}\right) = \arccos\left(\frac{v_1}{\|v\|}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Das liefert die Abbildung $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{D}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Auf das Ergebnis wenden wir die Scherung mit dem Wert $\alpha = 2$ an:

$$\mathcal{S}(x) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$$

Und anschliešend drehen wir das Ganze wieder zurück:

$$\mathcal{D}^{-1}(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x$$

Die Gesamtabbildung ist dann die Verknüpfung dieser Drei Abbildungen gemäš:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(x) = (\mathcal{D}^{-1} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{D})(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} x \end{aligned}$$

Wenn wir einfach keine konkreten Werte einsetzen erhalten wir die allgemeine Formel:

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{\alpha}{2}\,\sin(2\,\varphi) & \alpha\,\cos(\varphi)^2 \\ -\alpha\,\sin(\varphi)^2 & \frac{\alpha}{2}\,\sin(2\,\varphi) + 1 \end{pmatrix}$$

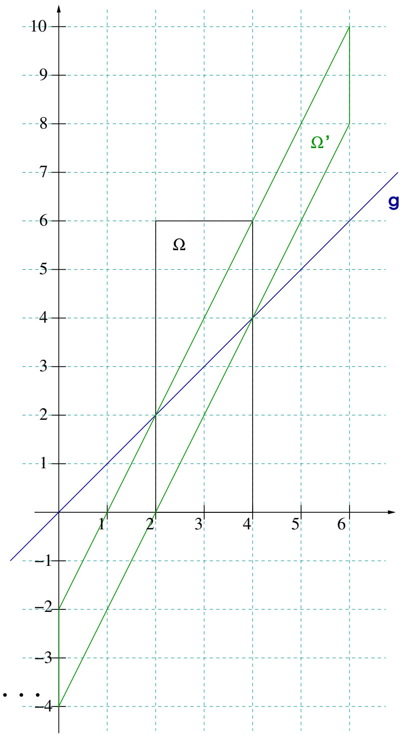
Das Matlab-Programm
ScherungGerade.m:

```
Omega = [[2 0]; [4 0];...
 [4 6]; [2 6]];
alpha = 2;
v   = [1 1];
nv  = norm(v,2);
phi = acos(v(1)/nv);

D  = [[cos(phi) sin(phi)];...
 [-sin(phi) cos(phi)]];
Di = inv(D);
S  = [[1 alpha]; [0 1]];

A  = @(x) (Di*S*D*x')';

Omegas = [A(Omega(1,:)); A(Omega(2,:));...
 A(Omega(3,:)); A(Omega(4,:))]
```



liefert die Ausgabe

```
        0   -2.0000
        0   -4.0000
   6.0000    8.0000
   6.0000   10.0000
```

Lösung 4:

$$\mathcal{D}(x) = v\ < v, x > + \cos\alpha\,(v \times x) \times v + \sin\alpha\,(v \times x)$$

(a) Mit $P(x) =< x, v > v$ gilt

$$\begin{aligned} < D(x) - P(x), v > &=< \cos\alpha\,(v \times x) \times v + \sin\alpha\,(v \times x), v > \\ &= \cos\alpha \underbrace{< (v \times x) \times v, v >}_{=0} + \sin\alpha \underbrace{< v \times x, v >}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) $\mathcal{D}(x) = D\,x = (d_1, d_2, d_3)\,x$:

$$d_i = \mathcal{D}(e_i) = v\,v_i + \cos\alpha\,(v \times e_i) \times v + \sin\alpha\,(v \times e_i)$$

Es ist

$$v \times e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ v_3 \\ -v_2 \end{pmatrix}, \ (v \times e_1) \times v = \begin{pmatrix} v_3^2 + v_2^2 \\ -v_1 v_2 \\ -v_1 v_3 \end{pmatrix},$$
$$v \times e_2 = \begin{pmatrix} -v_3 \\ 0 \\ v_1 \end{pmatrix}, \ (v \times e_2) \times v = \begin{pmatrix} -v_1 v_2 \\ v_1^2 + v_3^2 \\ -v_2 v_3 \end{pmatrix},$$
$$v \times e_3 = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ (v \times e_3) \times v = \begin{pmatrix} -v_1 v_3 \\ -v_2 v_3 \\ v_2^2 + v_1^2 \end{pmatrix}$$

und damit $D =$

$$\begin{pmatrix} v_1^2 + (v_3^2 + v_2^2)\cos\alpha & v_1 v_2(1-\cos\alpha) - v_3\sin\alpha & v_1 v_3(1-\cos\alpha) + v_2\sin\alpha \\ v_1 v_2(1-\cos\alpha) + v_3\sin\alpha & v_2^2 + (v_1^2 + v_3^2)\cos\alpha & v_2 v_3(1-\cos\alpha) - v_1\sin\alpha \\ v_1 v_3(1-\cos\alpha) - v_2\sin\alpha & v_2 v_3(1-\cos\alpha) + v_1\sin\alpha & v_3^2 + (v_1^2 + v_2^2)\cos\alpha \end{pmatrix}$$

(c) Wie lautet die Matrix D für die Drehachse gegeben durch die Gerade g : $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} t$?

Rotieren Sie den Punkt $x = (1,1,1)$ um g um den Winkel $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Es ist

$$v = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \ \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

und damit

$$D \approx \begin{pmatrix} 0.7280 & -0.5251 & 0.4407 \\ 0.6088 & 0.7908 & -0.0635 \\ -0.3152 & 0.3145 & 0.8954 \end{pmatrix}$$

x wird abgebildet auf $D\,x$

$$D\,x \approx \begin{pmatrix} 0.6437 \\ 1.3361 \\ 0.89471 \end{pmatrix}$$