Blatt 16: Abbildungen Grundlagen **MLAE 1& 2**

Aufgabe 1:

Gegeben sei ein kartesisches Koordinatensystem im $\mathbb{R}^2$ mit der Standardbasis

$$\mathrm{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sind zwei Vektoren

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ a_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

gegeben. Ein beliebiger Vektor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = v_1 \mathrm{e}_1 + v_2 \mathrm{e}_2$$

werde abgebildet auf den Vektor

$$v' = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = v_1 a_1 + v_2 a_2 .$$

(a) Wie lautet das Bild v' des Vektors

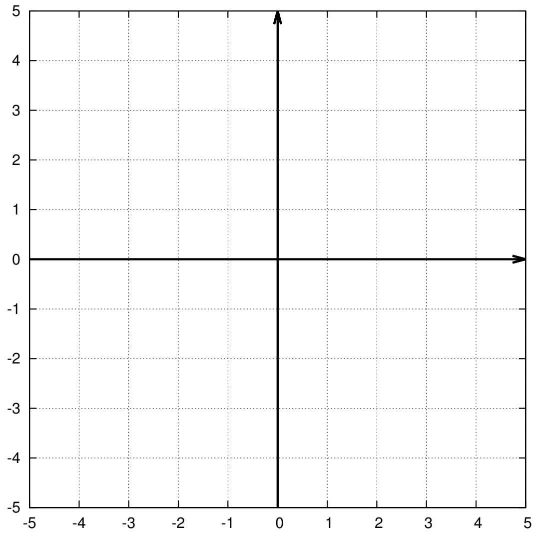
$$v = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}?$$

(b) Wie kann die Abbildung $f(v) = v'$ mit

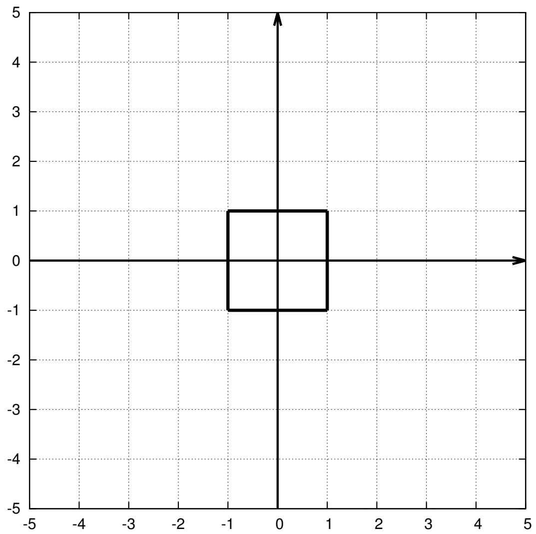
$$\begin{aligned} f \, : \, \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ v &\mapsto v' \end{aligned}$$

beschrieben werden?

(c) Berechnen und zeichnen Sie in einem Koordinatensystem das das Bild des Einheitsquadrats und der Abbildung f.



Zeichnen Sie $\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, a_2, a_2$ in die euklidische Ebene (oben) ein.

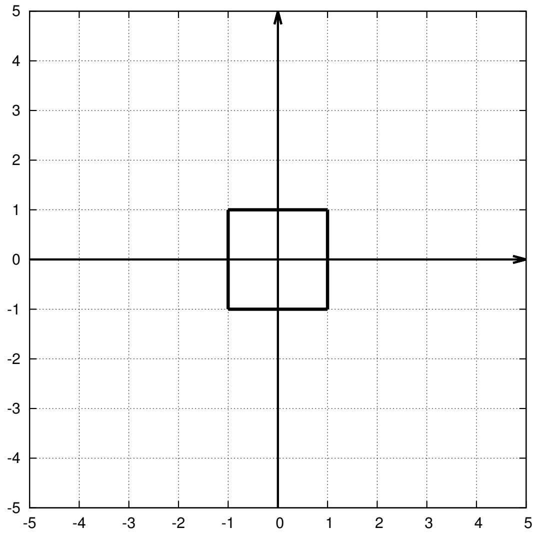


Aufgabe 2:

(a) Wiederholen Sie Aufgabenteil (c) der vorherigen Aufgabe und ersetzen Sie dabei a_1, a_2 durch b_1, b_2 mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Was beobachten Sie? Überlegen Sie sich selbst eine Abbildung zur Untersuchung.



Aufgabe 3:

Welche Matrix gehört zu derjenigen Abbildung, die die Länge eines jeden Vektors v halbiert und seine Richtung umkehrt?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

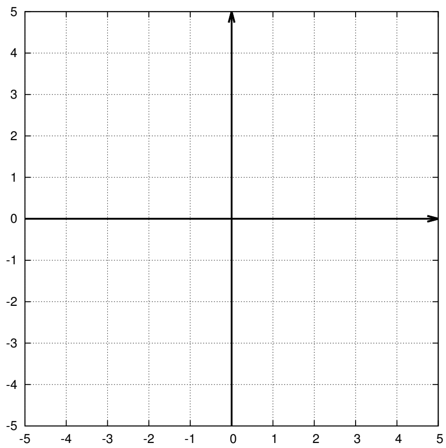
Aufgabe 4:

(a) Entscheiden Sie, ob es sich bei den Matrizen um Drehung, Streckung, Projektion oder Spiegelung handelt.

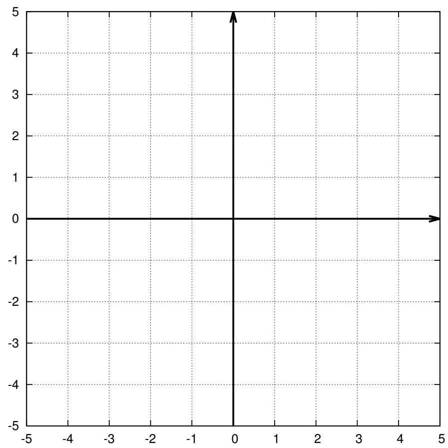
(i) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

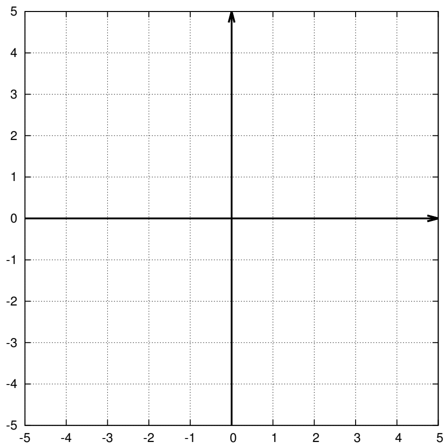
(b) Fertigen Sie zu jeder Abbildung eine erklärende Skizze an.



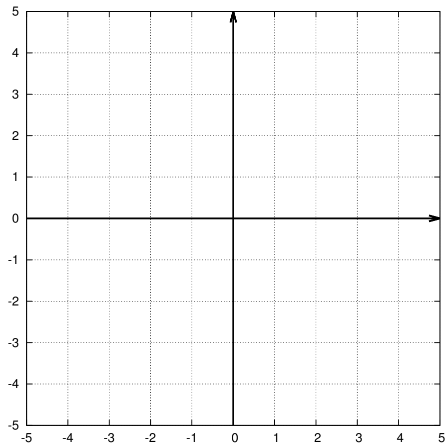
(i)



(ii)



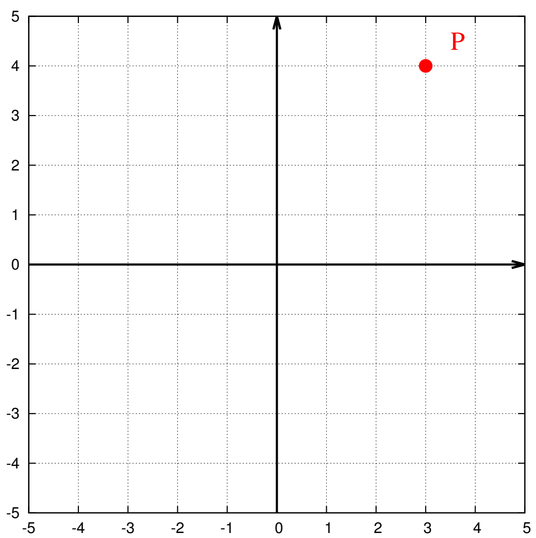
(i)



(ii)

(c) Handelt es sich bei der Spiegelung um eine Spiegelung an der x- oder y-Achse? Beschreiben Sie die Abbildung der entsprechend anderen Spiegelung.

(d) Spiegeln Sie den Punkt $P = (3, 4)$ erst an der x- dann an der y-Achse. Wie sieht die Matrix dieser Abbildung aus?



$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Lösung 1:

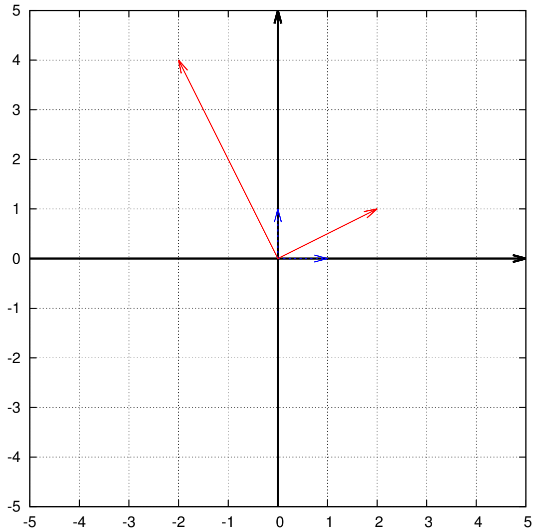
(a)

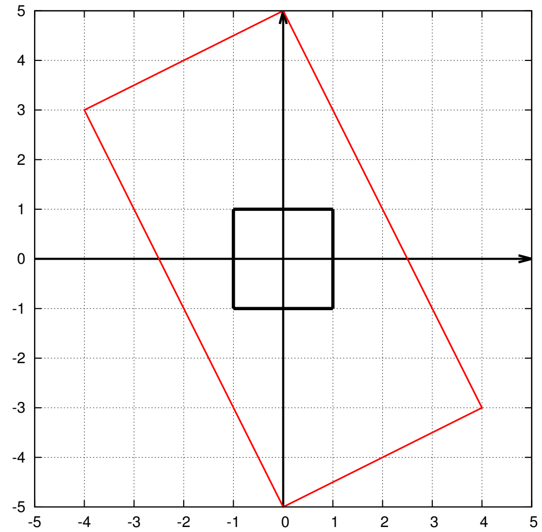
$$v' = v_1 a_1 + v_2 a_2$$
$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\\frac{9}{2}\end{pmatrix}$$

(b)

$$f(v) = v_1 a_1 + v_2 a_2 = (a_1, a_2)\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}2 & -2\\1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$$

(c)

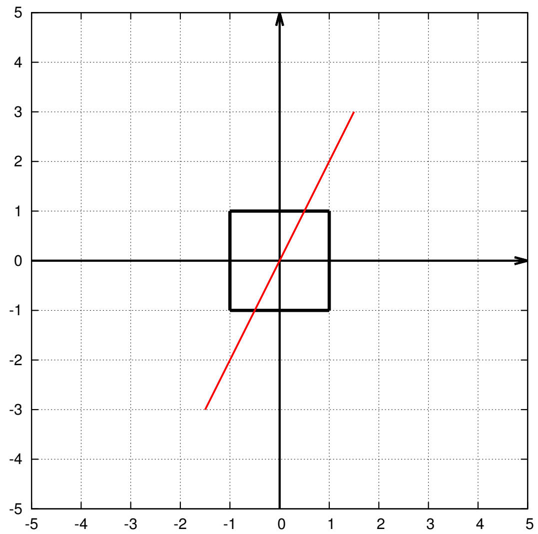




Lösung 2:

(a)

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-3\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$$



(b) Das Bild ist kein Viereck mehr sondern eine Strecke. Hat also eine Dimension verloren.

Lösung 3:

$$(d)\ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

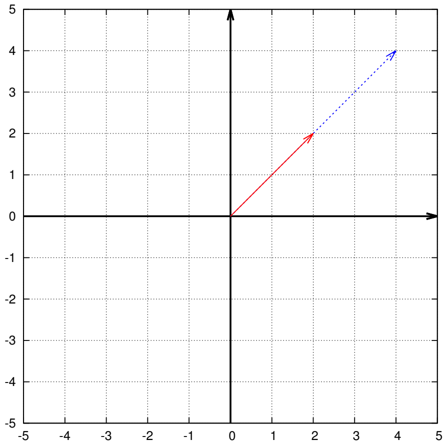
Lösung 4:

(a)

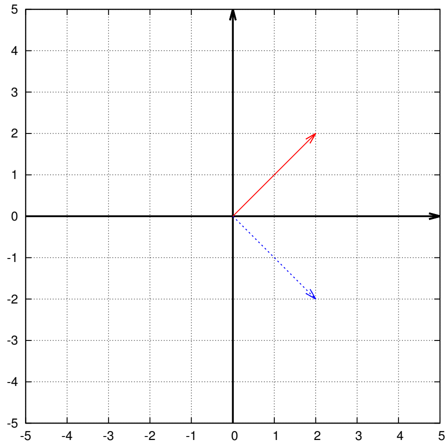
(i)	Streckung mit Faktor 2	(ii)	Spiegelung an der x–Achse
(iii)	Projektion auf die x–Achse	(iv)	Drehung um $-90°$

(b) Fertigen Sie zu jeder Abbildung eine erklärende Skizze an.

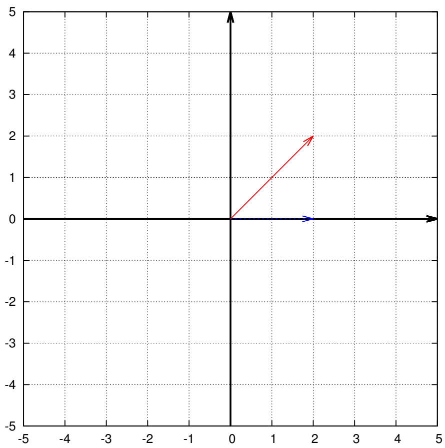
(i)



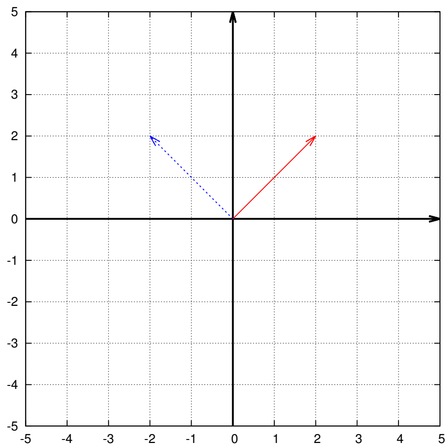
(ii)



(iii)



(iv)



(c) Es handelt sich um eine Spiegelung an der x–Achse. Eine Spiegelung an der y–Achse kann durhc die Matrix

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben werden.

(d) Siegelung an der x–Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Siegelung an der y–Achse:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gesamtabbildung:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$