Blatt 15: Orthogonalisierung und hermit. Matrizen MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Es sei $V = (\mathbb{R}^3, < \cdot, \cdot >)$ und

$$U = \text{Span}\,(a_1, a_2) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3 .$$

(a) Zeigen Sie, dass $\{a_1, a_2\}$ eine Orthogonalbasis ist.

(b) Zeigen Sie, dass

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin U$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass für die orthogonale Projektion (aus Beispiel 56)

$$P(v) = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 59 \\ -7 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Folgendes gilt:

$$(i)\; P(v) \in U \quad \text{und} \quad (ii)\; v - P(v) \perp U$$

Aufgabe 2:

Gegeben ist die Basis

$$\mathcal{A} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\}$$

zum Prähilbertraum $V = (\mathbb{R}^3, s(\cdot, \cdot))$.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren die entsprechende Orthonormalbasis $\mathcal{B}$ bezüglich des Standardskalarprodukts $s(\cdot, \cdot) =< \cdot, \cdot >$.

(a) Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren die entsprechende Orthonormalbasis $\mathcal{C}$ bezüglich des Skalarprodukts $s(\cdot, \cdot) = 3\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3$.

Aufgabe 3:

Es sei $\Omega = (0, 1)$ und $V = (C^\circ(\Omega), (\cdot, \cdot)_{L^2})$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $(\cdot,\cdot)_{L^2} \, : \, V \times V \to \mathbb{R}$ mit

$$(f,g)_{L^2} = \int\limits_{\Omega} f(x) \cdot g(x)\, dx$$

ein Skalarprodukt ist.

(b) Es seien die Funktionen $f(x) = 1$ und $g(x) = x$ auf Ω gegeben. Skizzieren Sie die Graphen und berechnen Sie den Winkel α mit

$$\tan\alpha = \frac{|m_f - m_g|}{1 + m_f \cdot m_g} \, ,$$

wobei m_f, m_g die Steigung der jeweiligen Graphen beschreibt.

(c) Berechnen Sie den Winkel

$$\angle(f,g)_{L^2} \, .$$

Was fällt Ihnen auf?

(d) Berechnen Sie den Winkel gemäß oben definertem L^2-Skalarprodukt, für $\Omega = (-1,1)$. Was fällt Ihnen auf?

Aufgabe 4:

Es sei der Prähilbertraum $(C^{\circ}([-1,1]), (\cdot,\cdot)_{L^2})$ mit Basis

$$\mathcal{A} = \{x^0, x^1, x^2, x^3, \ldots\}$$

gegeben. Berechnen Sie die zugehörige Orthogonalbasis $\mathcal{B} = \{b_0, b_1, b_2, b_3, \ldots\}$ mit

$$(b_i, b_j)_{L^2} = \delta_{ij} \|b_j\|^2_{L^2} \, .$$

(Die b_i heißen Legendre-Polynome.)

Aufgabe 5:

Gegeben seien die Pauli-Matrizen σ_1, σ_2 und σ_3

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \, , \; \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \, , \; \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie das Skalarprodukt

$$s^\star(\sigma_i, \sigma_j) = \frac{1}{2} \operatorname{Spur}(\sigma_i \, \sigma_j^\star) \, .$$

Zeigen Sie

(a)

$$(\mathbb{C}^{2\times 2}, \mathbb{R}, s^\star) = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid A = A^\star \, \wedge \, \operatorname{Spur}(A) = 0\}$$

(b)

$$(\mathbb{C}^{2\times 2}, \mathbb{C}, s^\star) = \{A \in \mathbb{C}^{2\times 2} \mid \operatorname{Spur}(A) = 0\}$$

(c) Warum kann kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ erzeugt werden?

(d) Welche Dimension haben diese Räume?

Lösung 1:

(a) zZ: $\{a_1, a_2\}$ ist eine Orthogonalbasis.

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2 - 2 = 0$$

(b) zZ: $v \notin U$, d.h. es gibt keine $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $v = \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2$:

$$\begin{aligned}
& v = \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 19 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(c) Zeigen Sie, dass für die orthogonale Projektion (aus Beispiel 56)

$$P(v) = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 59 \\ -7 \\ -50 \end{pmatrix}$$

Folgendes gilt:

$$(i)\ P(v) \in U \quad \text{und} \quad (ii)\ v - P(v) \perp U$$

(i) zZ: $P(v) \in U$, d.h. es gibt $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $P(v) = \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2$:

$$\begin{aligned} & P(v) = \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 59 \\ -7 \\ -50 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \lambda_2 = \frac{5}{9} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 59 \\ -7 \\ -50 \end{pmatrix} - \frac{5}{9}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 9 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \frac{9}{45} \end{aligned}$$

(ii) zZ: $v - P(v) \perp U$: Es gilt

$$< v - P(v), \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2 >= \lambda_1\ < v - P(v), a_1 > +\lambda_2\ < v - P(v), a_2 >$$

und

$$\begin{aligned} < v - P(v), a_1 > &= \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 59 \\ -7 \\ -50 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \frac{1}{45}\left\langle \begin{pmatrix} 76 \\ -38 \\ 95 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{45}(76 - 2 \cdot 38) = 0 \end{aligned}$$

und

$$< v - P(v), a_2 > = \frac{1}{45}\left\langle \begin{pmatrix} 76 \\ -38 \\ 95 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{45}(152 + 38 - 190) = 0$$

Damit ist $v - P(v)$ orthogonal zu jedem $u \in U$, da sich jedes $u \in U$ durch $u = \lambda_1\, a_1 + \lambda_2\, a_2$ in U darstellen lässt.

Lösung 2:

Gegeben ist die Basis

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

zum Prähilbertraum $V = (\mathbb{R}^3, s(\cdot,\cdot))$.

(a)

$$b_1 = \frac{1}{\|a_1\|}\, a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_2 = a_2 - < a_1, b_1 > \ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad b_2 = \frac{1}{\|\tilde{b}_2\|}\, \tilde{b}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{b}_3 = a_3 - < a_3, b_1 > \ b_1 - < a_3, b_2 > \ b_2 = \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Basis $\mathcal{B}$ zu $\mathcal{A}$ bezüglich des Standardskalarprodukts lautet demnach

$$\mathcal{B} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Es ist $s(x,y) = 3\,x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + 2\,x_3\,y_3$ und $\|x\|_s = \sqrt{s(x,x)} = \sqrt{3\,x_1^2 + x_2^2 + 2\,x_3^2}$. Damit gilt dann

$$c_1 = \frac{1}{\|a_1\|_s}\, a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{c}_2 = a_2 - \underbrace{s(a_2, c_1)}_{=\frac{8}{\sqrt{6}}}\, c_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad c_2 = \frac{1}{\underbrace{\|\tilde{c}_2\|_s}_{=\frac{3}{\sqrt{30}}}}\, \tilde{c}_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{c}_3 = a_3 - \underbrace{s(a_3, c_1)}_{=\frac{5}{\sqrt{6}}}\, c_1 - \underbrace{s(a_3, c_2)}_{=\frac{-8}{\sqrt{30}}}\, c_2 = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -3 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad c_3 = \frac{1}{\underbrace{\|\tilde{c}_3\|_s}_{=\frac{10}{3\sqrt{30}}}}\, \tilde{c}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Die orthogonale Basis $\mathcal{C}$ bezüglich des Skalarprodukts $s(\cdot, \cdot)$ lautet demnach

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Als gerundete Dezimalzahlen erhalten Sie näherungsweise

$$\mathcal{C} \approx \left\{ \begin{pmatrix} 0.4082 \\ 0.4082 \\ 0.4082 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.3651 \\ -0.7303 \\ -0.1826 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.1826 \\ 0.5477 \\ -0.5477 \end{pmatrix} \right\}$$

Sie können dieses Ergebnis mit Matlab überprüfen. Der Matlab-Code lautet

```
a1=[1; 1; 1]; a2=[2; 0; 1]; a3=[0; 1; 2];

scalp = @(x,y) 3*x(1)*y(1)+x(2)*y(2)+2*x(3)*y(3);
norms = @(x) sqrt(scalp(x,x));

norma1 = norms(a1);
```

```
c1 = a1/norma1;

c2 = a2 - scalp(a2,c1)*c1;
c2 = c2/norms(c2);

c3 = a3 - scalp(a3,c1)*c1 - scalp(a3,c2)*c2;
c3 = c3/norms(c3);

% Test
% Ergebnis sollte [1 1 1] sein
NT=[norms(c1) norms(c2) norms(c3)];
% Ergebnis sollte [0 0 0] sein
NS=[scalp(c1,c2) scalp(c1,c3) scalp(c2,c3)];

% Ausgabe bei korrektem Ergebnis als 3x3-Matrix,
% deren Spalten gerade c1,c2,c3 sind
if norm(NT-ones(1,3))+norm(NS) < 1e-12
    C=[c1 c2 c3]
else
    fprintf('Fehler bei der Berechnung\n');
end
```

und liefert die Ausgabe

```
C =

    0.4082    0.3651   -0.1826
    0.4082   -0.7303   -0.5477
    0.4082   -0.1826    0.5477
```

Lösung 3:

(a) Überprüfen Sie die Axiome $(S1)$ bis $(S4)$.

(b) Mit $m_f = 0$ und $m_g = 1$ gilt

$$\tan\alpha = \frac{|m_f - m_g|}{1 + m_f\, m_g} = \frac{1}{1} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{4}\,(= 45^\circ)\,.$$

(c)

$$
\begin{aligned}
(f,g)_{L^2} &= \int_0^1 1 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \\
\|f\|_{L^2} &= \sqrt{(f,f)_{L^2}} = \left(\int_0^1 1^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = 1 \\
\|g\|_{L^2} &= \sqrt{(g,g)_{L^2}} = \left(\int_0^1 x^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\
\Rightarrow \qquad \cos\varphi &= \frac{(f,g)_{L^2}}{\|f\|_{L^2} \, \|g\|_{L^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
\Rightarrow \qquad \varphi &= \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} \, (= 30\,^\circ)
\end{aligned}
$$

Auffällig ist, dass man intuitiv in der Gaußschen Ebene mit Standardskalarprodukt denkt und den Winkel damit automatisch bei $\frac{\pi}{4}$ bzw. 45° erwartet.

(d)

$$
\begin{aligned}
(f,g)_{L^2} &= \int_{-1}^1 1 \cdot x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \Big|_{-1}^1 = 0 \\
\|f\|_{L^2} &= \sqrt{(f,f)_{L^2}} = \left(\int_{-1}^1 1^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \\
\|g\|_{L^2} &= \sqrt{(g,g)_{L^2}} = \left(\int_{-1}^1 x^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\
\Rightarrow \qquad \cos\varphi &= \frac{(f,g)_{L^2}}{\|f\|_{L^2} \, \|g\|_{L^2}} = 0 \\
\Rightarrow \qquad \varphi &= \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \, (= 90\,^\circ)
\end{aligned}
$$

Ob zwei Graphen orthogonal sind oder nicht hängt nicht nur von der Wahl des Skalarprodukts ab, sondern auch von der Wahl des Definitionsbereichs Ω. Das ist eigentlich sinnvoll wenn man an die Definition von Funktionen denkt, die ja selbst schon von der Wahl des Definitionsgebiets abhängt.

Lösung 4:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_0 = 1 \\
b_1 &= a_1 - \frac{(a_1, b_0)_{L^2}}{\|b_0\|_{L^2}}\, b_0 = x \\
b_2 &= a_2 - \frac{(a_2, b_0)_{L^2}}{\|b_0\|_{L^2}}\, b_0 - \frac{(a_2, b_1)_{L^2}}{\|b_1\|_{L^2}}\, b_1 = x^2 - \frac{1}{3} \\
b_3 &= a_3 - \frac{(a_3, b_0)_{L^2}}{\|b_0\|_{L^2}}\, b_0 - \frac{(a_3, b_1)_{L^2}}{\|b_1\|_{L^2}}\, b_1 - \frac{(a_3, b_2)_{L^2}}{\|b_2\|_{L^2}}\, b_2
\end{aligned}
$$

Aus

$$
\begin{aligned}
(a_3, b_0)_{L^2} &= \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0 \\
(a_3, b_1)_{L^2} &= \int_{-1}^{1} x^4\, dx = \frac{2}{5}\,,\ \|b_1\|_{L^2}^2 = \int_{-1}^{1} x^2\, dx = \frac{2}{3} \\
(a_3, b_2)_{L^2} &= \int_{-1}^{1} x^5 - \frac{1}{3}\, x^3\, dx = 0
\end{aligned}
$$

folgt dann

$$
b_3 = x^3 - \frac{3}{5}\, x
$$

Ein kleiner Matlab-Code vereinfacht die Arbeit:

```
clear all
syms x

scalp = @(f,g) int(f*g,x,-1,1);
mon   = @(n) x^n;

b(1) = mon(0);
for k=2:5
    sums=0;
    for i=1:k-1
        sums = sums+b(i)*scalp(mon(k-1),b(i))/scalp(b(i),b(i));
    end
    b(k) = mon(k-1)-sums;
end
```

```
% formatierte Ausgabe der Ergebnisse
for k=1:5
    bk=char(b(k));
    fprintf('P_%d(x)=%s\n',k,bk);
end
```

Liefert die Ausgabe

```
P_1(x)=1
P_2(x)=x
P_3(x)=x^2 - 1/3
P_4(x)=x^3 - (3*x)/5
P_5(x)=x^4 - (6*x^2)/7 + 3/35
```

Lösung 5:

Gegeben seien die Pauli-Matrizen σ_1, σ_2 und σ_3

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\ ,\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie das Skalarprodukt

$$s^\star(\sigma_i, \sigma_j) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(\sigma_i\,\sigma_j^\star)\,.$$

Wir schauen einmal ganz generell welcher Raum durch die Pauli-Matrizen aufgespannt wird für allgemeine $\lambda_i \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Es sei eine beliebige Matrix aus $\{\mathbb{R}^{2\times 2}, \mathbb{C}^{2\times 2}\}$ gegeben, durch die Pauli-Matrizen erzeugt, also

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ \frac{1}{2}(b+c) \\ d+a \end{pmatrix}$$

Ohne irgendwelche Einschränkungen zu machen sehen wir, dass auf jeden Fall $d = -a$ erfüllt sein muss. Die Matrizen, die erzeugt werden sind in jedem Fall spurlos denn sie haben die Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathrm{Spur}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a + (-a) = 0\,.$$

Weiter wissen wir über die Lösung des LGS:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\,(b+c)\,,\ \lambda_2 = \frac{1}{2}\,(b-c)\,i\,,\ \lambda_3 = a$$

Für $\lambda_i \in \mathbb{C}$ gibt es weiter keine Einschränkungen. damit haben wir Ergebnis (b). Was wenn $\lambda_i \in \mathbb{R}$ gilt? Dann muss Folgendes ebenfalls gelten:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{2}\,(b+c) \in \mathbb{R} && \Rightarrow && \mathrm{Im}(b) = -\mathrm{Im}(c) \\
\lambda_2 &= \frac{1}{2}\,(b-c)\,i \in \mathbb{R} && \Rightarrow && \mathrm{Re}(b) = \mathrm{Re}(c) \\
\lambda_3 &= a \in \mathbb{R} && \Rightarrow && \mathrm{Im}(a) = 0
\end{aligned}$$

Die erzeugten Matrizen haben also die Form

$$\begin{pmatrix} a_r & b_r + i\,b_i \\ b_r - i\,b_i & -a_r \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad a_r, b_r, b_i \in \mathbb{R}\,.$$

Für diese Matrizen gilt nicht nur die Spurlosigkeit sondern auch $A = A^\star$, womit Teil (a) geklärt wäre.

(c) Es kann kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^{2\times 2}$ erzeugt werden, da $\sigma_2 \notin \mathbb{R}^{2\times 2}$ gilt.

(d) Die Dimension ist 3, da es drei Basisvektoren gibt.