Blatt 14: Normen und Skalarprodukte in V **MLAE 1& 2**

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Skalarprodukte

$$s_1(x,y) = x_1\,y_1 + x_2\,y_2\,, \quad s_2(x,y) = x_1\,y_1 + \frac{1}{4}\,x_2\,y_2 \quad \text{und} \quad s_3(x,y) = 3\,x_1\,y_1 + 2\,x_2\,y_2\,.$$

(a) Entscheiden Sie bezüglich welchem Skalarprodukt die beiden Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

orthonormal sind.

(b) Berechnen Sie die Winkel zwischen den Vektoren

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

bezüglich der gegebenen Skalarprodukte.

(c) Bestimmen Sie $\alpha \in \mathbb{R}$, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp_{s_3} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

erfüllt ist, dabei meint $\perp_{s_3}$ othogonal bezüglich des s_3-Skalarproduktes.

Aufgabe 2:

Auf $\Omega = [0,1] \subset \mathbb{R}$ sei der Vektorraum $(\mathbb{P}_3, \|\cdot\|_{L^2})$ mit der Norm

$$\|g\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega g(x)^2\,dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben.

(a) $\|\cdot\|_{L^2}$ ist die Euklidische Norm zum Skalarprodukt

$$(f,g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)\cdot g(x)\,dx\,.$$

überzeugen Sie sich davon.

(b) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Funktionen $f(x) = x^2$ und $g(x) = 2\,x$.

(c) Überzeugen Sie sich davon, dass es sich bei

$$(i)\ \|f\|_{L^p} = \left(\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{und} \quad (ii)\ \|f\|_\infty = \max_{x\in\Omega} |f(x)|$$

Aufgabe 3:

Verbinden Sie Zusammenpassendes mit Linien.

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, <\cdot,\cdot>)$	☐	☐	unitärer VR
$(\mathbb{C}^{2\times 2}, \mathbb{C}, s(\cdot,\cdot))$	☐	☐	Prähilbertraum
$(\mathbb{P}_2, \mathbb{R}, (\cdot,\cdot)_{L^2})$	☐	☐	normierter Raum
$(C^0, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$	☐	☐	Euklidischer Raum

Aufgabe 4:

Berechnen Sie von den Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -2i & 3-i \end{pmatrix}$$

die Frobeniusnorm:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}\,,\ A \in \mathbb{K}^{m\times n}$$

Aufgabe 5:

Gegeben seien die Pauli-Matrizen σ_1, σ_2 und σ_3 zusammen mit der Einheitsmatrix $\sigma_0 = E_2$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

sowie das Skalarprodukt

$$s(\sigma_i, \sigma_j) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}(\sigma_i\,\sigma_j^\star)\,, \quad \sigma_j^\star = \overline{\sigma_j}^T\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sigma_0, \ldots, \sigma_3$ eine Orthonormalbasis vom $\mathbb{C}^{2\times 2}$ bilden.

(**Tipp:** Zu zeigen ist (i) Die σ_i sind paarweise orthogonal und je normiert und (ii) Alle Matrizen in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ lassen sich durch die σ_i darstellen.)

(b) Welche Dimension hat der Raum $(C^{2\times 2}, s)$?

(c) überzeugen Sie sich davon, dass es sich bei $s(\cdot,\cdot)$ tatsächlich um ein Skalarprodukt handelt.

Aufgabe 6:

Es sei $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Vektor und $x_{\mathcal{B}} = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ der Koordinatenvektor von x bezüglich $\mathcal{B}$.

(a) Berechnen Sie den Koordinatenvektor $x_{\mathcal{C}}$ des Vektors $x = (-2, 0, -1)^T$ bezüglich

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(b) Gilt die Umkehrung von Satz 3.7? Wenn der Koordinatenvektor eindeutig ist, handelt es sich dann um eine Basis?

Was also, wenn $\mathcal{B}$ keine Basis ist, nicht minimal oder gar etwas, was den angegebenen Vektor gar nicht darstellen kann?

Lösung 1:

(a)

$$\begin{aligned} s_1(v,w) &= 1\cdot 0 + 0\cdot 2 = 0 && \text{orthogonal}\\ \|v\|_{s_1}^2 = s_1(v,v) &= 1\cdot 1 + 0\cdot 0 = 1 && \text{normiert}\\ \|w\|_{s_1}^2 = s_1(w,w) &= 0\cdot 0 + 2\cdot 2 = 4 && \text{nicht normiert} \end{aligned}$$

v und w sind bezüglich s_1 nicht orthonormal.

$$\begin{aligned} s_2(v,w) &= 1\cdot 0 + \frac{1}{4}\,0\cdot 2 = 0 && \text{orthogonal}\\ \|v\|_{s_2}^2 = s_2(v,v) &= 1\cdot 1 + \frac{1}{4}\,0\cdot 0 = 1 && \text{normiert}\\ \|w\|_{s_2}^2 = s_2(w,w) &= 0\cdot 0 + \frac{1}{4}\,2\cdot 2 = 1 && \text{normiert} \end{aligned}$$

v und w sind bezüglich s_2 orthonormal.

$$\begin{aligned} s_3(v,w) &= 3\cdot 1\cdot 0 + 2\cdot 0\cdot 2 = 0 && \text{orthogonal}\\ \|v\|_{s_3}^2 = s_3(v,v) &= 3\cdot 1\cdot 1 + 2\cdot 0\cdot 0 = 3 && \text{nicht normiert}\\ \|w\|_{s_3}^2 = s_3(w,w) &= 3\cdot 0\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot 2 = 8 && \text{nicht normiert} \end{aligned}$$

v und w sind bezüglich s_3 nicht orthonormal.

(b)

$$\begin{aligned} \cos\varphi_1 &= \frac{s_1(v,w)}{\|v\|_{s_1}\|w\|_{s_1}} = \frac{1}{\sqrt{10}} && \Rightarrow && \varphi_1 \approx 1.25\ (\widehat{=}71.57^\circ)\\ \cos\varphi_2 &= \frac{s_2(v,w)}{\|v\|_{s_2}\|w\|_{s_2}} = \frac{28}{85} && \Rightarrow && \varphi_2 \approx 1.24\ (\widehat{=}70.77^\circ)\\ \cos\varphi_3 &= \frac{s_3(v,w)}{\|v\|_{s_3}\|w\|_{s_3}} = && \Rightarrow && \varphi_3 \approx 1.5\ (\widehat{=}86.7^\circ) \end{aligned}$$

(c)

$$s_2\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}\right) = 3 + 2\,\alpha = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha = -\frac{3}{2}$$

Lösung 2:

(a)

$$\|f\|_{L^2} = \sqrt{(f,f)_{L^2}} = \left(\int\limits_\Omega f(x)\cdot f(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_\Omega f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

(b) Es ist der Winkel $\varphi = \angle(f,g)$ gegeben durch

$$\cos\varphi = \frac{(f,g)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}}$$

$$\begin{aligned}
(f,g)_{L^2} &= \int\limits_\Omega f(x)\cdot g(x)\,dx = \int\limits_\Omega 2\,x^3\,dx = \frac{1}{2}\\
\|f\|_{L^2} &= \left(\int\limits_\Omega f^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_\Omega x^4\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\\
\|g\|_{L^2} &= \left(\int\limits_\Omega g^2(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int\limits_\Omega 4\,x^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\\
\Rightarrow \qquad \cos\varphi &= \frac{(f,g)_{L^2}}{\|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}} = \frac{\sqrt{15}}{4}\\
\Rightarrow \qquad \varphi &\approx 0.25268\ (\widehat{=}\,14.48^\circ)
\end{aligned}$$

(c) Hierzu die Normaxiome N1, N2 und N3 prüfen.

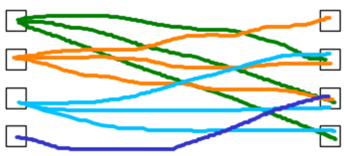
Lösung 3:

$(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, <\cdot,\cdot>)$

$(\mathbb{C}^{2\times 2}, \mathbb{C}, s(\cdot,\cdot))$

$(\mathbb{P}_2, \mathbb{R}, (\cdot,\cdot)_{L^2})$

$(C^0, \mathbb{R}, \|\cdot\|_\infty)$



unitärer VR

Prähilbertraum

normierter Raum

Euklidischer Raum

Lösung 4:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{1+4+1+1+4+9+0+1+4} = \sqrt{25} = 5$$

$$\|B\|_F = \sqrt{1+|i|^2+|-2\,i|^2+|3-i|^2} = \sqrt{1+1+2^2+\sqrt{10}^2} = \sqrt{16} = 4$$

Lösung 5:

(a) (i) Zu Zeigen: Es gilt $s(\sigma_i, \sigma_j) = \delta_{ij}$:

$$
\begin{aligned}
s(\sigma_0,\sigma_0) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 1\\
s(\sigma_0,\sigma_1) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = 0\\
s(\sigma_0,\sigma_2) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = 0\\
s(\sigma_0,\sigma_3) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s(\sigma_1,\sigma_0) &= s(\sigma_0,\sigma_1) = 0\\
s(\sigma_1,\sigma_1) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 1\\
s(\sigma_1,\sigma_2) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}i&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) = 0\\
s(\sigma_1,\sigma_3) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s(\sigma_2,\sigma_0) &= s(\sigma_0,\sigma_2) = 0\\
s(\sigma_2,\sigma_1) &= s(\sigma_1,\sigma_2) = 0\\
s(\sigma_2,\sigma_2) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 1\\
s(\sigma_2,\sigma_3) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&-i\\i&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}0&i\\i&0\end{pmatrix}\right) = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
s(\sigma_3,\sigma_0) &= s(\sigma_0,\sigma_3) = 0\\
s(\sigma_3,\sigma_1) &= s(\sigma_1,\sigma_3) = 0\\
s(\sigma_3,\sigma_2) &= s(\sigma_2,\sigma_3) = 0\\
s(\sigma_3,\sigma_3) &= \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Spur}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right) = 1
\end{aligned}
$$

Also sind alle Pauli-Matrizen paarweise orthogonal und sind jeweils normiert gemäß $\|\sigma_i\| = \sqrt{s(\sigma_i, \sigma_i)} = 1$.

(ii) Zu zeigen ist, dass alle möglichen Matrizen aus $\mathbb{C}^{2\times 2}$ durch Linearkombination der Pauli-Matrizen dargestellt werden können, anders formuliert:

$$\forall\, A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}\ \exists!\,(\lambda_0, \ldots, \lambda_3)\ :\ \sum_{i=0}^{3} \sigma_i\,\lambda_i = A + i\,B$$

$$\sum_{i=0}^{3} \sigma_i \, \lambda_i = A + i\, B$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \lambda_0 + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \lambda_1$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \lambda_3 = A + i\, B$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_0 + \lambda_3 & \lambda_1 - i\,\lambda_2 \\ \lambda_1 + i\,\lambda_2 & \lambda_0 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + i\, b_{11} & a_{12} + i\, b_{12} \\ a_{21} + i\, b_{21} & a_{22} + i\, b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}_{=:C} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + i\, b_{11} \\ a_{12} + i\, b_{12} \\ a_{21} + i\, b_{21} \\ a_{22} + i\, b_{22} \end{pmatrix}$$

Das resultierende LGS ist eindeutig lösbar, wenn $\det(C) \neq 0$ gilt. Schau'n wir mal:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & 1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & i & 0 \end{vmatrix}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{vmatrix} = -4\, i \neq 0$$

Glück gehabt!

Anmerkung: $\exists!\, (\lambda_0, \ldots, \lambda_3)$ bedeutet, dass die σ_i tatsächlich eine Basis sind. Hätte das LGS für die λ_i mehrere Lösungen geboten so bedeutete dies, dass die σ_i linear abhängig sind. Es handelte sich dann um ein Erzeugendensystem, nicht um eine Basis.

(b) $\dim C^{2\times 2} = 4$

(c) Prüfen Sie auf

$$\begin{array}{ll} (S1) & s(\alpha\, A + \beta\, B,\, C) = \alpha\, s(A,\, C) + \beta\, s(B,\, C) \\ (S2) & s(A,\, B) = s(B,\, A) \\ (S3) & s(A,\, A) >= 0 \\ & s(A,\, A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = 0! \end{array}$$

Es sind A, B, C beliebige Matrizen aus $\mathbb{C}^{2\times 2}$.

Lösung 6:

(a) Die Berechnung des Koordinatenvektors führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) Die Berechnung eines Koordinatenvektors im $\mathbb{R}^n$ führt immer auf ein LGS der Form

$$\left(b_1, \ldots, b_n\right) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = x$$

Das LGS ist eindeutig lösbar genau dann wenn $\det(b_1, \ldots, b_n) \neq 0$. In einem n-dimensionalen Raum ist das auch gleichbedeutend damit, dass $b_1, \ldots, b_n$ eine Basis bildet. Insofern gilt auch die Umkehrung.

Wenn $\mathcal{B}$ keine Basis sondern ein Erzeugendensystem ist, also linear abhängige Vektoren enthält so ist besitzt das LGS keine eindeutige Lösung und damit gibt es auch keine eindeutige Darstellung des Koordinatenvektors. Ist es hingegen so, dass ein Vektor gar nicht von $\mathcal{B}$ dargestellt werden kann so wird das LGS keine Lösung besitzen und demzufolge gibt es für x auch keinen Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{B}$. Klar, oder?