Blatt 13: Normen und Skalarprodukte in V — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Es sei

$$V = \mathrm{Span}\,(p_0, p_1, p_2)\ ,\ \text{mit } p_i = x^i\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass das Erzeugendensystem von V eine Basis ist.

(b) Welche Dimension hat V und für welches $k \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$V = \mathbb{P}_k\,?$$

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}_2 = \mathrm{Span}\,(1, x-1, (x-1)(x-2))$$

gilt.

Aufgabe 3:

Sei V der Vektorraum der reellwertigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die trigonometrischen Funktionen

$$f_1(x) = \cos x\,,\ f_2(x) = \cos(2\,x)\,,\ f_3(x) = \sin x\,,\ f_4(x) = \sin(2\,x) \text{ und } f_5(x) = \sin(3\,x)$$

linear unabhängig sind.

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Menge M, die alle reellen Polynome aus $\mathbb{P}_2$ enthält, deren Graph jeweils durch die Punkte

$$P = (-1, 4) \text{ und } Q = (1, 6)$$

verläuft. **Tipp:** Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem auf.

Aufgabe 5:

Sei $\mathbb{R}^{2\times 2}$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen. Geben Sie eine möglichst einfache Basis dieses Vektorraums an.

Aufgabe 6:

Sei $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ eine Basis des VRs V. Ferner seien $a_1 = 2\,b_1 - b_2$, $a_2 = b_2 + b_3 + b_4$ und $a_3 = b_3 - b_4$ und $U = \mathrm{Span}\,(a_1, a_2, a_3)$.

(a) Zeigen Sie, dass $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ eine Basis von U ist.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten von

$$x = 6\,b_1 - 5\,b_2 - 4\,b_4$$

bezüglich A.

(c) Ergänzen Sie A zu einer Basis von V.

Aufgabe 7:

Sei V ein Prähilbertraum. Zeigen Sie, dass für eine Menge $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ mit orthogonalen Vektoren $u_1, \ldots, u_n$ Foglendes gilt:

(a) Die u_i sind linear unabhängig.

(b) Für jeden Vektor $v \in V$ ist

$$w = v - \sum_{i=1}^{n} < v, u_i > \ u_i$$

orthogonal zu jedem u_j.

Achtung: Das ist eine $\star$-Aufgabe.

Lösung 1:

(a)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \, x^i = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_0 + \lambda_1 \, x + \lambda_2 \, x^2 = 0 \\ \Rightarrow \quad & \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(b)

$$\dim(V) = 3 \quad \text{und} \quad k = 2\,.$$

Lösung 2:

Die Bedingung

$$\lambda_1 + \lambda_2 \, (x-1) + \lambda_3 \, (x-1)(x-2) = a_0 + a_1 \, x + a_2 \, x^2$$

führt auf das eindeutig lösbare LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 03 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} .$$

Damit ist klar, dass das Erzeugendensystem $1, x-1$ und $(x-1)(x-2)$ minimal ist und auch, dass jedes $q \in \mathbb{P}_2$ über dieses dargestellt werden kann.

Lösung 3:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^{2} \lambda_i \, f_i(x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda_1 \, \cos x + \lambda_2 \cos(2\,x) + \lambda_3 \sin x + \lambda_4 \sin(2\,x) + \lambda_5 \sin(3\,x) = 0 & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$x = 0$ und $x = \pi$ liefern

$$\begin{aligned} & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \wedge \quad & -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{aligned}$$

also $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{3\pi}{4}$ ergeben

$$\begin{aligned}
& & \lambda_3 - \lambda_5 &= 0 \\
\wedge & & \lambda_3 \frac{1}{\sqrt{2}} + \lambda_4 + \lambda_5 \frac{1}{\sqrt{2}} &= 0 \\
\wedge & & \lambda_3 \frac{1}{\sqrt{2}} - \lambda_4 + \lambda_5 &= 0 \\
\Leftrightarrow & & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\det \neq 0} \begin{pmatrix} \lambda_3 \\ \lambda_4 \\ \lambda_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & & \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 &= 0 \qquad \checkmark
\end{aligned}$$

Lösung 4:

Ansatz:

$$p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2$$

zu erfüllende Bedingungen:

$$p(-1) = 4 \quad \text{und} \quad p(1) = 6$$

LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$M = \{p \in \mathbb{P}_3 \mid p(x) = 3 - t - x + t\,x^2\,,\ \forall t \in \mathbb{R}\}$$

Lösung 5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 6:

(a) Zu zeigen ist, dass a_1, a_2, a_3 linear unabhängig sind:

$$\begin{aligned}
\lambda_1\,a_1 + \lambda_2\,a_2 + \lambda_3\,a_3 &= \lambda_1\,(2\,b_1 - b_2) + \lambda_2\,(b_2 + b_3 + b_4) + \lambda_3\,(b_3 - b_4) \\
&= b_1\,(2\,\lambda_1) + b_2\,(-2\,\lambda_1 + \lambda_2) + b_3\,(\lambda_2 + \lambda_3) + b_4\,(\lambda_2 - \lambda_3) \\
&= 0
\end{aligned}$$

mit

$$0 = 2\lambda_1 = -2\,\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_2 - \lambda_3$$

da ja die b_i linear unabhängig sind.

Damit erhalten wir das LGS

$$\begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \quad \underset{(\text{IV-III})\,\frac{-1}{2}}{\xrightarrow{\text{II+I}}} \quad \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \quad \underset{\text{IV-III}}{\xrightarrow{\text{III-II}}} \quad \begin{array}{ccc|c} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \\ \hline 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, also sind die a_i linear unabhägig und somit ein minimales Erzeugendensystem, bzw. eine Basis von U.

(b) Gesucht sind α_i mit $x = \alpha_i\, a_i$:

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1\, a_1 + \alpha_2\, a_2 + \alpha_3\, a_3 \\ &= \alpha_1\,(2\, b_1 - b_2) + \alpha_2\,(b_2 + b_3 + b_4) + \alpha_3\,(b_3 - b_4) \\ &= b_1\, \underbrace{(2\,\alpha_1)}_{=6} + b_2\, \underbrace{(-2\,\alpha_1 + \alpha_2)}_{=-5} + b_3\, \underbrace{(\alpha_2 + \alpha_3)}_{=0} + b_4\, \underbrace{(\alpha_2 - \alpha_3)}_{=-4} \end{aligned}$$

Daraus folgt ziemlich direkt, dass

$$\alpha_1 = 3\,,\ \alpha_2 = -2 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = 2$$

ist und somit gilt für x:

$$x = 3\, a_1 - 2\, a_2 + 2\, a_3$$

und der Koordinatenvektor lautet

$$x_A = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

(c) b_4 kann nicht durch a_1, a_2, a_3 dargestellt werden. Sie überzeugen sich davon, indem Sie nachweisen, dass die Vektoren

$$a_1, a_2, a_3, b_4$$

linear unabhägig sind. Es ist dann

$$V = \operatorname{Span}\,(a_1, a_2, a_3, b_4)\ .$$

Lösung 7:

(a)

$$\lambda_1 u_1 + \cdots \lambda_n u_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(u_1, \cdots, u_n\right)}_{\text{rang=n, wegen der Orthog.}} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ die Lösung ist eindeutig $\Rightarrow$ die u_i sind linear unabhängig.

(b) Dazu muss man lediglich nachweisen, dass $< w, u_j >= 0$ ist $\forall j$. Also los:

$$< w, u_j > = \left\langle v - \sum_{i=1}^{n} < v, u_i > u_i, u_j \right\rangle$$

Bilinearität des Skalarprodukts (S1)

$$=< v, u_j > - \left\langle \sum_{i=1}^{n} < v, u_i > u_i, u_j \right\rangle$$

nochmal Bilinearität des Skalarprodukts (S1)

$$=< v, u_j > - \sum_{i=1}^{n} < \underbrace{< v, u_i >}_{\in \mathbb{R}} u_i, u_j >$$

nochmal Bilinearität des Skalarprodukts (S1)

$$=< v, u_j > - \sum_{i=1}^{n} < v, u_i > \underbrace{< u_i, u_j >}_{=\delta_{ij}}$$

Orthogonalität der u_i ausnutzen

$$=< v, u_j > - < v, u_j >= 0$$