Blatt 12: Vektorräume — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Welche der folgenden Mengen sind Vektorräume über $\mathbb{R}$? Überprüfen Sie die Vektorraumaxiome $(V1)$ bis $(V8)$:

(a) $V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ mit

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda\,x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

(b) $V = (\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ mit

$$x+y = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \\ x_3+y_3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda\,x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(c) $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 \geq 0\}$ mit der Addition und skalaren Multiplikation des $\mathbb{R}^n$.

(d) $V = \mathbb{P}_2$ mit

$$\mathbb{P}_2 = \left\{p(x) \mid p(x) = a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0\right\}, \quad a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$$

und

$$(p+q)(x) = p(x) + q(x) \quad \text{und} \quad (p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x)\,.$$

(e) V sei die Menge aller stetigen Funktionen mit Mittelwert Null, d.h.

$$V = \left\{ f \in C([a,b]) \;\middle|\; \int_a^b f(x)\,dx = 0 \right\}.$$

(f) V sei die Menge aller stetigen Funktionen mit Mittelwert eins, d.h.

$$V = \left\{ f \in C([a,b]) \;\middle|\; \int_a^b f(x)\,dx = 1 \right\}.$$

Aufgabe 2:

(a) Sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

linear abhängig oder unabhängig?

(b) Für welche $x, y \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} x^2 \\ 1 \\ y \end{pmatrix} , \quad b = \begin{pmatrix} y \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

linear unabhängig?

(c) Schreiben Sie jeweils den Vektor $x \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination der Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} , \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} , \quad b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

und geben Sie jeweils die Koordinatendarstellung an.

(i) $x = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -15 \end{pmatrix}$, (ii) $x = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \\ 6 \end{pmatrix}$, (iii) $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (iv) $x = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

(d) Sind die Funktionen $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \mathrm{e}^x$ und $f_3(x) = \mathrm{e}^{-x}$ als Vektoren des Vektorraums der Funktionen auf $\mathbb{R}$ linear abhängig oder unabhängig?

Aufgabe 3:

Bei welchen der folgenden Abbildungen $n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ handelt es sich um Normen?

$$\begin{array}{lll} (a) & n(a) := \sum_{k=1}^{n} |a_k| & \\ (b) & n(a) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |a_k| & (a \in \mathbb{R}^n \, , \ \alpha_k > 0 \, , \ k = 1, \ldots, n) \\ (c) & n(a) := |a_1| + 2|a_2| & (a \in \mathbb{R}^3) \\ (d) & n(a) := 3|a_1| + a_2 & (a \in \mathbb{R}^2) \end{array}$$

Lösung 1:

(a) V ist kein VR, da $(V8)$ verletzt ist.

(b) V ist kein VR, da $(V5)$ verletzt ist.

(c) V ist kein VR, da $(V4)$ verletzt ist.

(d) V ist ein VR.

(e) V ist ein VR.

(f) V ist kein VR, denn für $f, g \in V$ gilt $f + g \notin V$.

Lösung 2:

(a) Die Vektoren sind linear abhängig. Es gilt $a - 2\,b + c = 0$.

(b) Die Vektoren a, b sind genau dann linear abhängig, wenn $y = -1$ und $x^2 = -y = 1$ gilt.

(c)

$$x = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i\, b_i\,, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}\,,\; b_i \in \mathbb{R}^3$$

mit

(i) $\lambda = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, (ii) $\lambda = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, (iii) $\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, (iv) $\lambda = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(d) Wir prüfen, ob es $\lambda_i \neq 0$ gibt, mit

$$\lambda_1 + \lambda_2\,\mathrm{e}^x + \lambda_3\,\mathrm{e}^{-x} = 0\,.$$

Da die Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, gilt sie insbesondere für $x \in \{0, 1, -1\}$. Damit erhalten wir drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2\,\mathrm{e} + \lambda_3\,\mathrm{e}^{-1} &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2\,\mathrm{e}^{-1} + \lambda_3\,\mathrm{e} &= 0 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{e} & \mathrm{e}^{-1} \\ 1 & \mathrm{e}^{-1} & \mathrm{e} \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Es ist

$$\det(A) = \mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2} - 2\,\mathrm{e} + 2\,\mathrm{e}^{-1} \approx 2.5529 \neq 0$$

und damit ist das homogene LGS eindeutig lösbar und es gilt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,,$$

womite die drei Funktionen als linear unabhängig anzusehen sind.

Lösung 3:

(a) $n(a)$ ist eine Norm, denn alle Normaxiome sind erfüllt:

(N1)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} |a_k| = 0 & \\ \Leftrightarrow\quad & |a_k| = 0 & \forall a_k \\ \Leftrightarrow\quad & a = 0 & \end{aligned}$$

(N2)

$$\begin{aligned} n(\lambda a) &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda a_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda||a_k| \\ &= |\lambda| \sum_{k=1}^{n} |a_k| \\ &= |\lambda|\, n(a) \end{aligned}$$

(N3)

$$\begin{aligned} n(a+b) &= \sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |b_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |a_k| + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \\ &= n(a) + n(b) \end{aligned}$$

(b) $n(a)$ ist eine Norm, denn alle Normaxiome sind erfüllt. Könnte es $\alpha_k = 0$ geben so wäre (N1) nicht erfüllt und wenn negative α_k zugelassen wären, so wäre (N3) nicht erfüllbar.

(N1)

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |a_k| = 0 & \\ \Leftrightarrow \quad & \alpha_k |a_k| = 0 & \forall a_k \\ \Leftrightarrow \quad & a = 0 & \text{da } \alpha_k \neq 0\,,\ \forall k \end{aligned}$$

(N2)

$$\begin{aligned} n(\lambda a) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |\lambda a_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |\lambda| \alpha_k |a_k| \\ &= |\lambda| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |a_k| \\ &= |\lambda|\, n(a) \end{aligned}$$

(N3)

$$\begin{aligned} n(a+b) &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |a_k + b_k| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |a_k| + \alpha_k |b_k| & \text{gilt nur für positive } \alpha_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |a_k| + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k |b_k| \\ &= n(a) + n(b) \end{aligned}$$

(c) $n(a)$ ist keine Norm. Die Abbildung scheitert schon gleich bei (N1), denn aus

$$|a_1| + 2|a_2| = 0$$

folgt zwar $a_1 = a_2 = 0$, aber a_3 kann dann beliebig sein. Es gilt hier nur

$$a = 0 \Rightarrow n(a) = 0\,.$$

Die Äquivalenz gilt nicht!

(d) $n(a)$ ist keine Norm. Die Abbildung scheitert auch hier schon gleich bei (N1), denn

$$3|a_1| + a_2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = -3\,|a_1|\,.$$