Blatt 11: Determinanten, komplementäre Matrizen und Cramersche Regel MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Matrizen regulär?

$$(a)\ A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad (b)\ B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Geben Sie die Menge aller α an, für die das folgende System eindeutig lösbar ist.

$$\begin{aligned} \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y &= 1 \\ \sin\alpha\, x + \cos\alpha\, y &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

(a) Sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \quad , \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

orthogonal?

(b) Es sei $\nu = \frac{1}{5}(1\ 2\ 2\ 4)^T$. Berechne $H = E_4 - 2\,\nu\nu^T$ und zeige, dass H orthogonal ist.

(c) Vervollständigen Sie die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & x \\ \frac{4}{5} & y \end{pmatrix}$$

so dass sie orthogonal wird.

Aufgabe 4:

Gegeben Sei das LGS

$$\begin{pmatrix} -2 & 4 & -10 \\ 0 & 1 & 3 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Lösen Sie das LGS $Ax = y$, indem Sie die inverse der Matrix A mittles komplementärer Matrix berechnen.

(b) Lösen Sie das LGS mit der Cramerschen Regel.

Aufgabe 5:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mit $\det(A) = 2$. Berechnen Sie

$$(a) \quad \det(2\,A) \qquad (b) \quad \det\left(A^{-1}\right) \qquad (c) \quad \det\left(A \cdot A^T\right)\ .$$

Aufgabe 6:

Seien $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A' gehe aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- ☐ $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \det A' = 0$
- ☐ $\det A = \det A'$
- ☐ $\det A = \lambda\, \det A'$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$.

Aufgabe 7:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

- ☐ $\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rg}\ A = 0$
- ☐ $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rg}\ A \leq n - 1$
- ☐ $\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rg}\ A = n.$

Aufgabe 8:

Welche der folgenden Aussagen ist für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ richtig?

- ☐ $\det(A + B) = \det A + \det B$
- ☐ $\det(\lambda\, A) = \lambda \det A$
- ☐ $\det((AB)C) = \det A \det B \det C$

Aufgabe 9:

Die Formel für die Entwicklung der Determinante von $A = (a_{ij})_{ij}$ nach der i-ten Zeile lautet:

- ☐ $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{\{ij\}}$
- ☐ $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{\{ji\}}$
- ☐ $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{\{ij\}}$

Lösung 1:

(a)
$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{formungen}]{\text{Zeilenum-}} \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 0 & (a+2)(a-1) \end{pmatrix}, \ a \notin \{0, -1\}$$

A ist regulär, genau dann wenn $a \notin \{-2, 1\}$.

(b)
$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & b \\ 1 & b & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{formungen}]{\text{Zeilenum-}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & b-1 & 1-a \\ 0 & 0 & b-a \end{pmatrix}$$

ist regulär falls $b \neq 1 \wedge b \neq a$ erfüllt ist.

(c) Orthogonaliät:

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} t$$

Normalität:

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} t \right\| = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \pm\frac{1}{5}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

sind orthogonal.

Lösung 2:

$$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2\,k-1)\,\pi}{4} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Lösung 3:

(a) Prüfe, dass $A \cdot A^T = E_3$, $A^T \cdot A = E_3$ und $B \cdot B^T \neq E_4$ gilt.

(b)
$$H = \begin{pmatrix} -23 & 4 & 4 & 8 \\ 4 & -17 & 8 & 16 \\ 4 & 8 & -17 & 16 \\ 8 & 16 & 16 & 7 \end{pmatrix} \frac{-1}{25} \qquad \text{und} \qquad H^T \cdot H = H \cdot H^T = E_4$$

Lösung 4:

(a)

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\tilde{A} = \frac{1}{188}\begin{pmatrix} -6 & -20 & 22 \\ 24 & 80 & 6 \\ -8 & 36 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\,y = \frac{1}{\det A}\,\tilde{A}\,y = \frac{1}{188}\begin{pmatrix} -6 & -20 & 22 \\ 24 & 80 & 6 \\ -8 & 36 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 40 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\det A_{1y} = \det\begin{pmatrix} 40 & 4 & -10 \\ -7 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix} = -188$$

$$\det A_{2y} = \det\begin{pmatrix} -2 & 40 & -10 \\ 0 & -7 & 3 \\ 8 & -4 & 0 \end{pmatrix} = 376$$

$$\det A_{3y} = \det\begin{pmatrix} -2 & 4 & 40 \\ 0 & 1 & -7 \\ 8 & 2 & -4 \end{pmatrix} = -564$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{188}\begin{pmatrix} -188 \\ 376 \\ -564 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lösung 5:

Es ist $\det(A) = 2$, dann gilt:

(a)

$$\det(2\,A) = 2^3\det(A) = 8\cdot 2 = 16$$

(b)

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{2}$$

(c)

$$\det\left(A\cdot A^T\right) = \det A\cdot\det A^T = (\det A)^2 = 4$$

Lösung 6:

Seien $A, A' \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und A' gehe aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

- ☐ $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \det A' = 0$
- ☐ $\det A = \det A'$
- ☒ $\det A = \lambda \det A'$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$.

Lösung 7:

Welche der folgenden Aussagen ist richtig? Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

- ☐ $\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rg}\, A = 0$
- ☒ $\det A = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Rg}\, A \leq n-1$
- ☐ $\det A = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Rg}\, A = n.$

Lösung 8:

Welche der folgenden Aussagen ist für alle $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ richtig?

- ☐ $\det(A+B) = \det A + \det B$
- ☐ $\det(\lambda A) = \lambda \det A$
- ☒ $\det((AB)C) = \det A \det B \det C$

Lösung 9:

Die Formel für die Entwicklung der Determinante von $A = (a_{ij})_{ij}$ nach der i-ten Zeile lautet:

- ☐ $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{\{ij\}}$
- ☒ $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{\{ji\}}$
- ☐ $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{\{ij\}}$