Blatt 9: LGS Textaufgaben **MLAE 1& 2**

Aufgabe 1:

(a) Ein Apotheker hat 36%-igen und 21%-igen Alkohol. Welche Mengen von beiden Lösungen muss er mischen, um 5 Liter 30%-igen Alkohol zu erhalten?

(b) Zusätzlich hat der Apotheker eine dritte Flüssigkeit 40%-igem Alkohols. Alle drei Flüssigkeit sollen nach wie vor in der Summe 5 Liter ergeben. Wie muss der Apotheker das Mischverhältnis wählen, damit sowohl bei eine Mischung aus der ersten und zweiten, als auch der aus der zweiten und dritten Flüssigkeit 30%-iger Alkohol entsteht?

(c) In welchem Bereich von 0 bis 100 muss der %-uale Anteil der dritten Flüssigkeit aus Teil (b) sein, damit es überhaupt ein sinnvolles Ergebnis geben kann?

Aufgabe 2:

Ein Fass kann durch drei Rohre A, B und C gefüllt werden. Rohr A und Rohr B benötigen zusammen 10 min, um das Fass zu füllen. Rohre A und C brauchen zusammen 12 min und B und C zusammen 20 min. Wie lange braucht jedes der Rohre alleine und wie lange brauchen alle Rohre zusammen, um das Fass zu füllen?

Aufgabe 3:

Sie planen eine Party, um die bestandenen Prüfungen zu feiern. Sie haben 150 CHF zur Verfügung. Es soll Sekt (10 CHF pro Flasche), Bier (0,5 CHF pro Flasche) und Wein (3 CHF pro Flasche) geben. Wegen der erwarteten Anzahl Besucher wollen Sie insgesamt 100 Flaschen an Getränken besorgen. Wieviel Flaschen Sekt, Wein und Bier kaufen Sie?

Lösung 1:

(a)

$$\begin{aligned} x + y &= 5 \\ 0.36\,x + 0.21\,y &= 5 \cdot 0.3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} x &= 3 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 0.36\,x + 0.21\,y &= (x + y) \cdot 0.3 \\ 0.21\,y + 0.4\,z &= (y + z) \cdot 0.3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 0.06\,x - 0.09\,y &= 0 \\ -0.09\,y + 0.1\,z &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 6\,x - 9\,y &= 0 \\ -9\,y + 10\,z &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{34} \begin{pmatrix} 75 \\ 50 \\ 45 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 2.21 \\ 1.47 \\ 1.32 \end{pmatrix}$$

(c) Es sei p der %-uale Anteil des Alkohols bei der dritten Flüssigkeit. Dann gilt:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 0.36\,x + 0.21\,y &= (x+y)\cdot 0.3 \\ 0.21\,y + \frac{p}{100}\,z &= (y+z)\cdot 0.3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 0.36\,x + 0.21\,y &= (x+y)\cdot 0.3 \\ 0.21\,y + \frac{p}{100}\,z &= (y+z)\cdot 0.3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x + y + z &= 5 \\ 6\,x - 9\,y &= 0 \\ -9\,y + (p-30)\,z &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5\,p - 132} \begin{pmatrix} 15\,(p-30) \\ 10\,(p-30) \\ 90 \end{pmatrix} \qquad p \neq 27$$

$$\Rightarrow \quad p \in \mathbb{L} = [30, 100]$$

Lösung 2:

Wir machen einen kleinen vorbereitenden Gedankenausflug:

Wenn das Rohr A 10 min und das Rohr B 20 min benötigt, um ein Fass zu füllen, dann erhalten wir eine gemeinsame Durchflussrate von

$$D_A + D_B = \frac{1 \text{ Fassf.}}{10 \text{ Min.}} + \frac{1 \text{ Fassf.}}{20 \text{ Min.}} = \frac{3 \text{ Fassf.}}{20 \text{ Min.}} = \frac{1 \text{ Fassf.}}{\frac{20}{3} \text{ Min.}} \approx \frac{1 \text{ Fassf.}}{6.67 \text{ Min.}}$$

Zusammen schaffen die Rohre eine Fassfüllung in ungefähr 6.67 Minuten.

Laut Aufgabenstellung gilt nun:

$$\begin{array}{ccccccl} D_A & + & D_B & & & = & \frac{1}{10} \\ D_A & & & + & D_C & = & \frac{1}{12} \\ & & D_B & + & D_C & = & \frac{1}{20} \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_A \\ D_B \\ D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{12} \\ \frac{1}{20} \end{pmatrix}$$

Die Durchflussraten der Einzelnen Rohre betragen demnach

$$\begin{pmatrix} D_A \\ D_B \\ D_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{60}$$

Rohre A und B benötigen jeweils 20 Minuten, um das Fass je alleine zu füllen und Rohr C 30 Minuten. Alle Rohre zusammen benötigen dann 7.5 Minuten, denn es gilt

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}=\frac{1}{7.5}\,.$$

Lösung 3:

Es seien S die Anzahl der Sektflaschen, B die der Bierflaschen und W die Anzahl der Weinflaschen. Wir erhalten das LGS

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 150 \\ 100 \end{pmatrix}$$

mit der Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix}\in\left\{\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -300 \\ 1700 \\ 0 \end{pmatrix}+\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 14 \end{pmatrix}\lambda \;\middle|\; \lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

Das sind zunächst unendlich viele Möglichkeiten. Allerdings müssen wir die Lösungsmenge einschränken. Wir wollen keine nicht positiven Werte. Wie soll man -6 Bierflaschen kaufen? Und die Werte müssen natürliche Zahlen ergeben. Sie wollen ja auch nicht 3/4 Flaschen Sekt kaufen. Wir brauchen eine vernünftige Zusatzbedingung; aber wie könnte die aussehen?

Was haben wir? Die ersten beiden Zeilen in der Lösungsmenge ergeben:

$$\begin{aligned} -300+5\,\lambda &= 14S \\ 1700-19\,\lambda &= 14\,W \end{aligned}$$

Wir lösen beide Zeilen nach λ auf und setzen sie dann entsprechend gleich. Das liefert

$$19\,S+5\,W=200$$

damit $S, W \in \mathbb{N}$ erfüllt ist und die letzte Gleichung muss S ein Vielfaches von 5 sein. Wir erhalten also mit

$$S=5\,n \quad n\in\mathbb{N}$$

eine zusätzliche Bedingung in unserem Gleichungssystem, welches dadurch zu einem 3×3 System anwächst, nämlich

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 150 \\ 100 \\ 5\,n \end{pmatrix}$$

mit der Lösungsmenge

$$\begin{pmatrix} S \\ W \\ B \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 5 \\ -19 \\ 14 \end{pmatrix} \middle| n \in \mathbb{N} \right\}$$

Zunächst mal liefert uns diese Darstellung ganzzahlige Werte. Das ist schon besser aber immer noch nicht ganz was wir haben wollen.

Die Anzahl der Bierflaschen soll positiv sein, dann muss also $n > 0$ sein. Das gilt ohnehin. Die Anzahl der Weinflaschen soll ebenfalls positiv sein, was auf $n \leq 2$ führt. Die für unser Problem sinnvollen Lösungswerte ergeben sich dann zu

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 21 \\ 74 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 68 \end{pmatrix} \right\}$$

Ein Fest für die Biertrinker auf jeden Fall!