Blatt8: LGS Auflösen

MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und interpretieren Sie die Lösung geometrisch.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 2x_4 &= 1, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 2, \\ 4x_1 + 14x_2 - x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 13x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 20x_4 &= 7. \end{aligned}$$

Aufgabe 2:

Lösen Sie folgende lineare Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

(a)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 60, \\ x - 3y + 2z &= -4, \\ 2x + 5y - 5z &= 68 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3x - 5y + 4z &= 5, \\ 7x + 2y - 3z &= 2, \\ 4x + 3y - 7z &= -11 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} 4x - 3y + 2z &= 40, \\ 5x + 9y - 7z &= 47, \\ 9x + 8y - 3z &= 90 \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{10} \\ 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} + \frac{3y-1}{4} - \frac{6z}{5} &= \frac{9}{5}, \\ \frac{5x}{4} - y + \frac{4z}{3} &= \frac{5}{6}, \\ \frac{3x+1}{7} - \frac{y}{3} - \frac{z}{6} &= -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

(f)

$$\begin{aligned} \frac{x+3y+z}{8} &= 2, \\ \frac{5x}{16} + \frac{5y}{8} + \frac{3z}{16} &= 3, \\ \frac{x}{8} + \frac{3y}{8} - \frac{z}{8} &= 8 \end{aligned}$$

(g)

$$\begin{aligned} x + y &= 8, \\ x + z &= 11, \\ y + z &= 13 \end{aligned}$$

(h)

$$\begin{aligned} \frac{9}{7x-4z} - \frac{4}{4y-3z} - \frac{3}{5x-4y} &= 2, \\ \frac{3}{7x-4z} + \frac{7}{5x-4y} + \frac{10}{4y-3z} &= -13, \\ \frac{21}{7x-4z} + \frac{12}{4y-3z} - \frac{4}{5x-4y} &= -9 \end{aligned}$$

(i)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 8, \\ 3x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 3x_5 &= 22, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 - x_5 &= 13, \\ 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 19, \\ 6x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 9x_4 + 4x_5 &= 41 \end{aligned}$$

Aufgabe 3:

Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ hat das lineare Gleichungssystem

1.

$$\begin{aligned} ax_1 + 4x_2 + 5x_3 &= a, \\ x_1 + ax_2 - 2x_3 &= 1, \\ 2x_1 + 2ax_2 - a^2x_3 &= a. \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 4ax_1 + x_3 &= 3 + 2a, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned}$$

keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen? Geben Sie in jedem Fall auch die Lösungsmenge an.

Aufgabe 4:

Die folgenden linearen Gleichungssysteme wurden bereits mit Hilfe des Gauß-Algorithmus auf die Zeilenstufenform gebracht. Diskutieren Sie die zugehörige Lösungsmengen und geben Sie die Lösungsmengen explizit an:

1.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	2	0	−2
0	1	−1	0	1
0	0	0	1	3

2.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	−1	3	0
0	1	0	2	−4	0
0	0	0	0	0	1

3.

x_1	x_2	x_3	
1	0	2	0
0	1	−3	0
0	0	0	0
0	0	0	0

4.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	0	2	0	1
0	1	−3	0	4
0	0	0	1	−2
0	0	0	0	0

5.

x_1	x_2	x_3	
1	0	0	−4
0	1	0	5
0	0	1	7

6.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	0	2	5
0	1	−2	0	−1	−6
0	0	0	1	3	4
0	0	0	0	0	0

7.

x_1	x_2	x_3	x_4	
1	2	0	−1	0
0	0	1	3	0
0	0	0	0	0

8.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	2	4	0	0
0	1	−3	1	0	0
0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0

9.

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
1	0	0	1	0	2
0	1	0	−3	0	−3
0	0	1	2	0	4
0	0	0	0	1	−2

Lösung 1:

Die Stufenform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 5 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -22 & 7 & 17 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

zeigt, dass es unendlich viele Lösungen gibt. Alle Lösungspunkte bilden eine Ebene, die nicht durch den Ursprung geht. Klar, denn $x = 0$ ist keine Lösung.

Lösung 2:

(a)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 16 \end{pmatrix}$$

(b)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(c)

$$\mathbb{L} = \frac{1}{178} \begin{pmatrix} 1759 \\ 90 \\ 177 \end{pmatrix}$$

(d)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$$

(e)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(f)

$$\mathbb{L} = -8 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(g)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(i)

$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

(h) Das LGS führt auf

$$\frac{1}{7\,x - 4\,z} = -\frac{1}{3}\,, \quad \frac{1}{4\,y - 3\,z} = -\frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{5\,x - 4\,y} = -1$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} 7\,x - 4\,z &= -3 \\ 4\,y - 3\,z &= -2 \\ 5\,x - 4\,y &= -1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow$

$$\mathbb{L} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -43 \\ 58 \\ 59 \end{pmatrix}$$

Lösung 3:

1. Stufenform:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 4 & 5 & a \\ 0 & \frac{a^2-4}{a} & -\frac{2\,a+5}{a} & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+4 & -2+a \end{array}\right)$$

   Für $a = 2$ stellt die Lösungsmenge eine Ebene dar und für $a = -2$ gibt es keine Lösung. Alle anderen Werte liefern als Lösung einen Punkt.

   $a = 0$ darf hier nicht mehr eingesetzt werden. Dieser Fall wird separat betrachtet und liefert die Lösung:

$$\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

2. $$\frac{1}{4\,a+1}\begin{pmatrix} 2\,a+5 \\ 2\,(a-2) \\ -3\,(2\,a-1) \end{pmatrix},\ a \neq \frac{-1}{4}$$

   Für $a = \frac{-1}{4}$ gibt es keine Lösung, andernfalls ist die Lösung eindeutig durch einen Punkt (abhängig von a) gegeben.

Lösung 4:

1. $n = 4$, Rang=3. Die Lösung ist eine Gerade (Parameter x_3).

$$g: \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Nicht lösbar, denn $0 = 1$ ist nicht wahr!

3. $n = 3$, Rang=2. Die Lösung ist eine Gerade durch den Ursprung (Parameter x_3).

$$g: \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

4. $n = 4$, Rang=3. Die Lösung ist eine Gerade (Parameter x_3).

$$g: \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

5. $n = 3$, Rang=3. Die Lösung ist ein Punkt und der lässt sich direkt ablesen:
$$x = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

6. $n = 5$, Rang=3. Die Lösung ist eine Ebene (Parameter x_3 und x_5)
$$E := \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. $n = 4$, Rang=2: Die Lösung ist eine Ebene (Parameter x_2 und x_4) durch den Ursprung.
$$E : \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

8. $n = 5$, Rang=3. Die Lösung ist eine Ebene (Parameter x_3 und x_4; $x_5 = 0$) durch den Ursprung.
$$E : \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

9. $n = 5$, Rang=4: Die Lösung ist eine Gerade (Parameter x_4). Die Lösung kann man direkt ablesen:
$$g : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$