Blatt7: Matrizen

MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Berechnen Sie:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad F = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Welche der folgenden Multiplikationen sind erlaubt?

(i)	$A \cdot B$	☐	(ii)	$B \cdot A$	☐	(iii)	$A \cdot C$	☐
(iv)	$D \cdot C$	☐	(v)	$C \cdot D^T$	☐	(vi)	$C \cdot D$	☐
(vii)	$C \cdot F$	☐	$(viii)$	$F \cdot B$	☐	(ix)	$B \cdot F$	☐

(b) Geben Sie bei allen erlaubten Multiplikationen in Teil (a) die Größe der Produktmatrix an.

Aufgabe 3:

Es seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie $A \cdot B$.
(b) Berechnen Sie $(A \cdot B)^T$.
(c) Berechnen Sie B^T.
(d) Berechnen Sie A^T.
(e) Berechnen Sie $B^T \cdot A^T$.
(f) Was stellen Sie fest?

Aufgabe 4:

Gegeben seien die Matrizen

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a) Berechnen Sie

$$V^T \cdot W \,.$$

(a) Berechnen Sie

$$V \cdot W^T \,.$$

Aufgabe 5:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *symmetrisch*, falls $A_{ij} = A_{ji}$ gilt für $1 \leq i, j \leq n$.

Für welche Werte x ist die Matrix

$$C = B^T \, A \, B$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

symmetrisch?

Aufgabe 6:

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ heißt *orthogonal*, falls gilt: $A^T \cdot A = E_n = A \cdot A^T$.

Bestimmen Sie x und y, so dass

$$C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & x \\ \frac{4}{5} & y \end{pmatrix}$$

orthogonal ist.

Lösung 1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 & 0 \\ 9 & 3 & 10 & 8 & 1 \\ 5 & 2 & 11 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 2:

(a)

(i)	$A \cdot B$	☐	(ii)	$B \cdot A$	☒	(iii)	$A \cdot C$	☐
(iv)	$D \cdot C$	☐	(v)	$C \cdot D^T$	☒	(vi)	$C \cdot D$	☐
(vii)	$C \cdot F$	☒	$(viii)$	$F \cdot B$	☒	(ix)	$B \cdot F$	☐

(b)

(ii)	$B \cdot A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$	(v)	$C \cdot D^T \in \mathbb{R}^{2\times 1}$
(vii)	$C \cdot F \in \mathbb{R}^{2\times 3}$	$(viii)$	$F \cdot B \in \mathbb{R}^{4\times 2}$

Lösung 3:

$$(A \cdot B)^T = \begin{pmatrix} 16 \\ 20 \end{pmatrix}^T = (16 \quad 20)$$

$$B^T \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (16 \quad 20)$$

Feststellung: $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$! Aha!

Lösung 4:

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad W = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(a)

$$V^T \cdot W = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6 =< V, W >= 32\,.$$

(b)

$$V \cdot W^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 12 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Lösung 5:

Die Matrix C ist symmetrisch wenn $x = -1$ gilt:

$$C = B^T A\, B = \begin{pmatrix} 7 - x & 3\,x - 9 & -8 \\ -12 & 27 & 6 \\ 2\,x - 6 & -6\,x & 12 \end{pmatrix} \overset{x\,=\,-1}{=} \begin{pmatrix} 8 & -12 & -8 \\ -12 & 27 & 6 \\ -8 & 6 & 12 \end{pmatrix}$$

Lösung 6:

$$C \cdot C^T = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + x^2 & \frac{12}{25} + x\,y \\ \frac{12}{25} + x\,y & \frac{9}{25} + y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{4}{5} \,\wedge\, y = \mp\frac{3}{5}$$