Blatt6: Ebenen und Matrizen — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Gegeben seien die Ebenen E_1 und E_2 in Koordinatendarstellung

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 5\}$$
$$E_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid -x_1 + 2\,x_2 - x_3 = -2\}$$

(a) Geben Sie E_1 und E_2 in Parameterform an.

(b) Wie "stehen" die Ebenen zueinander?

(c) Es sei $P = (2, 1, 2)$. Prüfen Sie, ob P zu einer der beiden Ebenen gehört. Verwenden Sie dazu sowohl die Parameter- als auch die Koordinatendarstellung der Ebenen.

Aufgabe 2:

Gegeben sind die drei Punkte $A = (1, -1, 2)$, $B = (-2, 0, 3)$ und $C = (3, 1, -2)$. Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene durch A, B, C auf.

Aufgabe 3:

(a) Liegt der Ursprung auf der Ebene, die durch die Punkte $(-2, 0, 1)$, $(4, 0, -2)$ und $(-1, -4, 3)$ gegeben ist?

(b) Liegen die Punkte $(0, 2, 2)$ und $(4, 1.5, 4.5)$ auf der Ebene $2\,x_1 + 3\,x_2 - 3\,x_3 + 1 = 0$?

Aufgabe 4:

(a) Wie lautet die 4×4–Matrix mit

$$A_{ik} = \begin{cases} i + k & \text{für } i > k \\ i \cdot k & \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

(b) Wie lautet die 5×5–Matrix mit

$$A_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{für } i + k = 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad ?$$

Aufgabe 5:

Berechnen Sie A aus B gemäß

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}b_{11} & -(b_{23} - b_{32} + b_{11}) & b_{21} + b_{23} \\ b_{11} - b_{12} & -b_{11} & b_{12} \\ -\frac{1}{3}b_{11} & 1 & -b_{12} - b_{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6:

Gegeben sind

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 6 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie

$$M = 2\,A\,A^T - 4\,B\,.$$

Lösung 1:

(a)

$$E_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu \,,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

(b) E_1 und E_2 sind nicht richtungsgleich (weder parallel noch gleich).

(c) $P = (2, 1, 2)$, Parameterdarstellung:

$P \in E_1$? Ja, denn

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mu$$

nach λ und μ auflösen liefert $\lambda = 1$ und $\mu = 2$.

$P \in E_2$? Ja. Die Rechnung ist analog und liefert ebenfalls $\lambda = 1$ und $\mu = 2$.

Koordinatendarstellung:

$P \in E_1$?

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\ 2 + 1 + 2 &= 5 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

$P \in E_2$?

$$\begin{aligned} -x_1 + 2\,x_2 - x_3 &= -2 \\ -2 + 2 \cdot 1 - 2 &= -2 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 2:

Ebene in Parameter-

$$E \;:\; A + t\,(B - A) + s\,(C - A) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} s$$

und Koordinatendarstellung

$$E \;:\; 3\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 - 6 = 0$$

Lösung 3:

(a) $0 \in E$? Gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \lambda + \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \mu\,?$$

Ja für $\mu = 0$ und $\lambda = 3^{-1}$. Also liegt der Ursprung auf der Ebene.

(b)

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 3\,x_2 - 3\,x_3 + 1 = 0 & \\ 2 \cdot 0 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 0 & \qquad \checkmark \\ 2 \cdot 4 + 3 \cdot \frac{3}{2} - 3 \cdot \frac{9}{2} = -1 & \qquad \cancel{\checkmark} \end{aligned}$$

$(0, 2, 2)$ liegt auf der Ebene und $(4, 1.5, 4.5)$ nicht.

Lösung 4:

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 & 8 \\ 4 & 5 & 9 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 16 \end{pmatrix} \qquad (b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung 5:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Lösung 6:

$$M = \begin{pmatrix} 22 & 6 & -30 \\ -6 & 12 & -14 \\ -70 & -6 & 62 \end{pmatrix}$$