School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt5: Punkte, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

(a) Teilen Sie die Strecke $\overline{AB}$ mit $A = (-9, 15, -2)$ und $B = (-12, -6, 4)$ in drei gleichlange Teile. Bestimmen Sie die Teilungspunkte.

(b) Gegeben sind die Ecken eines Dreiecks $A = (-2, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 2)$ und $C = (-5, 2, -3)$. Berechnen Sie den Winkel α bei der Ecke A und den Flächeninhalt des Dreiecks.

(c) Gegeben ist das Dreieck ABC mit: $A = (6, 5, 5)$, $B = (2, 7, 3)$ und $C = (2, 2, x)$. Berechnen Sie x so, dass die Fläche des Dreiecks 28 wird.

Aufgabe 2:

Der Vektor

$$d = \begin{pmatrix} 7 \\ a \\ b \end{pmatrix}$$

steht auf den Vektoren

$$b = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -5 \\ 20 \\ 9 \end{pmatrix}$$

senkrecht. Berechnen Sie a und b.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4:

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, dass

$$(a \times b) \times c =< a, c > b- < b, c > a$$

gilt.

Tipp: Multiplizieren Sie beide Seiten aus.

Aufgabe 5:

Stellen Sie die Parametergleichung der Geraden g auf, die durch den Punkt $P = (1, 0, 3)$ verläuft und normal zu den beiden Geraden

$$h_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist.

Machen Sie sich eine Skizze von der Situation, so dass Sie Ihenen anschaulich klar ist.

Aufgabe 6:

Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene auf, die durch den Punkt $P = (2, -1, 1)$ verläuft und orthogonal zu den Ebenen

$$E_1 : \ 3\,x + 2\,y - z + 4 = 0 \quad \text{und} \quad E_2 : \ x + y + z - 3 = 0$$

ist.

Aufgabe 7:

Gegeben sind zwei Ebenen $E_1 : \ 2\,x - y + 3\,z + 4 = 0$ und $E_2 : \ x + y - 2\,z - 3 = 0$ und ein Punkt $P = (2, 0, -1)$. Gesucht ist eine Parametergleichung der Geraden g, die durch P geht und zu beiden Ebenen parallel ist.

Lösung 1:

(a) Wir erhalten die Teilungspunkte T_1 und T_2 gemäß

$$T_1 = A + \frac{1}{3}(B - A) = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -21 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T_2 = A + \frac{2}{3}\alpha(B - A) = \begin{pmatrix} -9 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -21 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad =$$

(b)

$$\alpha = 135^\circ$$

(c)

$$F = \frac{1}{2}\,\|(B - A) \times (C - A)\|_2 = \frac{1}{2}\left\|\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ x - 5 \end{pmatrix}\right\|_2 = \left\|\begin{pmatrix} x - 8 \\ 2\,x - 6 \\ 20 \end{pmatrix}\right\|_2$$

$$= \sqrt{(x-8)^2 + (2\,x-6)^2 + 20^2} \stackrel{!}{=} 28 \qquad \text{(Hier verwenden Sie gerne den TR)}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in \left\{4 \pm \frac{2\sqrt{455}}{5}\right\}$$

Lösung 2:

$$a = 4\,,\; b = -5$$

Lösung 3:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) & - & (-3)\cdot 5 \\ (-3)\cdot(-4) & - & 1\cdot(-2) \\ 1\cdot 5 & - & (-4)\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Lösung 4:

Es gilt

$$
\begin{aligned}
(a \times b) \times c &= \begin{pmatrix} a_2b_3 & - & a_3b_2 \\ a_3b_1 & - & a_1b_3 \\ a_1b_2 & - & a_2b_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_3b_1c_3 - a_1b_3c_3 - a_1b_2c_2 + a_2b_1c_2 \\ a_1b_2c_1 - a_2b_1c_1 - a_2b_3c_3 + a_3b_2c_3 \\ a_2b_3c_2 - a_3b_2c_2 - a_3b_1c_1 + a_1b_3c_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
< a, c > b - < b, c > a &= \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \left\langle \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_1c_1b_1 + a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 \\ a_1c_1b_2 + a_2c_2b_2 + a_3c_3b_2 \\ a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 + a_3c_3b_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1c_1a_1 + b_2c_2a_1 + b_3c_3a_1 \\ b_1c_1a_2 + b_2c_2a_2 + b_3c_3a_2 \\ b_1c_1a_3 + b_2c_2a_3 + b_3c_3a_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a_2c_2b_1 + a_3c_3b_1 - b_2c_2a_1 - b_3c_3a_1 \\ a_1c_1b_2 + a_3c_3b_2 - b_1c_1a_2 - b_3c_3a_2 \\ a_1c_1b_3 + a_2c_2b_3 - b_1c_1a_3 - b_2c_2a_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\square$

Lösung 5:

$$
g: \; P + \tilde{\lambda} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Lösung 6:

$$
a = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}
$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Ebene

$$
E: \; 3\,x - 4\,y + z + d = 0
$$

d wird nun so bestimmt, dass $P \in E$ gilt:

$$
3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 1 + d = 0 \quad \Leftrightarrow \quad d = -11
$$

$\Rightarrow$

$$E:\ 3\,x - 4\,y + z - 11 = 0$$

Lösung 7:

$$g:\ P + t\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\quad \text{mit}\quad \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, a \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, a \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \wedge \quad \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} 2\,a_1 - a_2 + 3\,a_3 &= 0 \\ a_1 + a_2 - 2\,a_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} a_2 &= \frac{7}{3}a_3 \\ a_1 &= -\frac{1}{3}a_3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$g:\ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$