

Blatt4: Polarform, Kreuzprodukte

MLAE 1 & 2

Aufgabe 1:

Stellen Sie die gegebenen Zahlenmengen graphisch dar:

$$(a) \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \cdot \operatorname{Re}(z) \leq 0\} \quad (b) \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \leq \operatorname{Im}(z)\}$$

Aufgabe 2:

Stellen Sie die angegebenen Zahlen jeweils in kartesischer Form bzw. Polarform dar:

$$\begin{array}{ll} (a) & 2 + 2i \\ (b) & -2 + 2\sqrt{3}i \\ (c) & -3i \\ (d) & 1 \\ (e) & 4(\cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ)) \\ (f) & \frac{3\sqrt{2}}{4}(\cos(-315^\circ) + i \sin(-315^\circ)) \end{array}$$

Aufgabe 3:

Vereinfachen Sie so weit wie möglich die folgenden Ausdrücke für $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{ll} (a) & \overline{a + \bar{b}} - (\bar{a} + b) \\ (b) & \overline{\bar{a} \cdot b} \cdot \overline{\left(\frac{\bar{a}}{b}\right)} \\ (c) & \overline{(a + b)} \cdot a - \bar{b} \cdot \overline{(\bar{a} + b)} \\ (d) & \overline{(a + b)^2} - (\bar{a} - \bar{b})^2 \end{array}$$

Aufgabe 4:

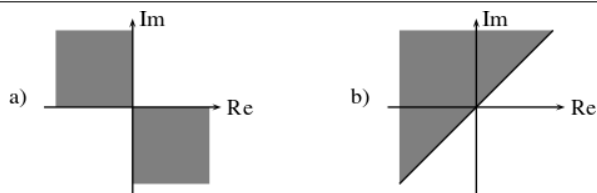
- (a) Berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts den Flächeninhalt des Dreiecks, das durch die Punkte $(1, 0)$, $(-4, 8)$ und $(2, -3)$ gegeben ist.
- (b) Gegeben ist das Dreieck im \mathbb{R}^3 durch die Eckpunkte $(6, -5, 5)$, $(-2, 7, -3)$ und $(2, -2, x)$. Berechnen Sie x so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks gerade 28 ergibt.

Aufgabe 5:

Überzeugen Sie sich von den folgenden Beziehungen zwischen Betrag und Skalarprodukt:

$$\begin{array}{ll} (a) & |\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \|b\| \quad \text{“Cauchy-Schwarzsche Ungleichung”} \\ (b) & \|a - b\|^2 = \|a\|^2 - 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2 \\ (c) & \|a \times b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2 - \langle a, b \rangle^2 \end{array}$$

Lösung 1: _____



Lösung 2: _____

- | | | | |
|-----|--|-----|---|
| (a) | $\sqrt{8} (\cos(45^\circ) + i \sin(45^\circ))$ | (b) | $4 (\cos(120^\circ) + i \sin(120^\circ))$ |
| (c) | $3 (\cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ))$ | (d) | $\cos(0^\circ) + i \sin(0^\circ)$ |
| (e) | $-2 + 2\sqrt{3}i$ | (f) | $\frac{3}{4} + \frac{3}{4}i$ |

Lösung 3: _____

- | | | | |
|-----|------------------------|-----|-------------|
| (a) | 0 | (b) | a^2 |
| (c) | $\bar{a}a - \bar{b}^2$ | (d) | $4\bar{a}b$ |

Lösung 4: _____

- (a) 3.5
 (b) $x \in \{-1, \frac{75}{13}\}$

Lösung 5: _____

- (a) $|\langle a, b \rangle| = \|a\| \|b\| \underbrace{|\cos \varphi|}_{\leq 1}$
 (b) $\|a - b\|^2 = \langle a - b, a - b \rangle = \langle a, a \rangle - \langle b, a \rangle - \langle a, b \rangle + \langle b, b \rangle = \|a\|^2 - 2\langle a, b \rangle + \|b\|^2$
 (c) aus-x-en