School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt3: Winkel, Abstände, Polarkoordinaten — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Welche Punkte der x- und y-Achse haben von den Punkten $A = (-1, -4)$ und $B = (5, -2)$ gleiche Abstände?

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Vektoren der Länge 14, die orthogonal zu $v = \binom{2}{-1}$ sind.

Aufgabe 3:

Es seien der Punkt $P = (5, 12)$ die beiden Geraden

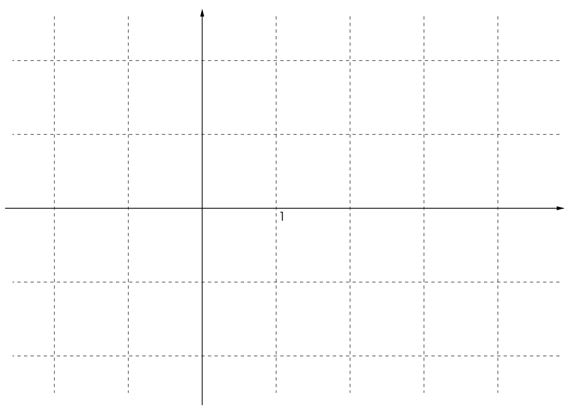
$$g : \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$
$$h : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

gegeben. Zu welchen der beiden Geraden gehört der Punkt P? Berechnen Sie die orthogonale Projektion Q von P auf die jeweils andere Gerade und bestimmen Sie den Abstand von P zu dieser Geraden. Prüfen Sie, dass das berechnete Q tatsächlich zur Geraden, auf die Sie projizieren wollten, gehört. In welchem Punkt schneiden sich die Geraden und mit welchem Winkel tun sie das? Skizzieren Sie die gesamte Situation.

Aufgabe 4:

(a) Zeichnen Sie folgende komplexe Zahlen die Gaußsche Ebene:

$$z_1 = 1 + i \qquad z_2 = -2 + \frac{i}{2}$$
$$z_3 = z_1 + z_2 \qquad z_4 = z_1 \cdot z_2$$
$$z_5 = \overline{z}_1 \qquad z_6 = \overline{z_2} \cdot z_2$$
$$z_7 = \frac{z_1}{z_2} \qquad z_8 = z_1^3$$



(b) Berechnen Sie von allen Zahlen jeweils den Abstand zum Ursprung und den Winkel zur x-Achse.

Lösung 1:

Lösung: Schnitt mit der x-Achse bei $X = (1, 0)$, mit der y-Achse bei $Y = (0, 3)$.

Weg: Gesucht sind die Punkte $X = \binom{x}{0}$ und $Y = (0, y)$ mit

$$\|B - X\|^2 = \|A - X\|^2 \quad \text{und} \quad \|B - Y\|^2 = \|A - Y\|^2 .$$

Berechnung von X:

$$\begin{aligned}
& & \|B - X\|^2 &= \|A - X\|^2 . \\
\Leftrightarrow & & (b_1 - x)^2 + b_2^2 &= (a_1 - x)^2 + a_2^2 \\
\Leftrightarrow & & 2\,(a_1 - b_1)\,x &= \|A\|^2 - \|B\|^2 \\
\Leftrightarrow & & x &= \frac{\|A\|^2 - \|B\|^2}{2\,(a_1 - b_1)} \\
\Leftrightarrow & & x &= \frac{17 - 29}{2\,(-1 - 5)} = 1
\end{aligned}$$

Berechnung von Y ist analog. Tipp: Sie können bei der Rechnung für a_i und b_i, $i = 1, 2$ ja gleich die konkreten Werte einsetzen.

Lösung 2:

$$v^\perp = \pm \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{14}{\sqrt{5}}$$

Lösung 3:

$P \in g$, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Andererseits gibt es kein s mit

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Sei Q die oprtogonale Projektion von P auf h:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \binom{5}{12} - \binom{1}{1}, \binom{1}{-3} \right\rangle}{\|\binom{1}{-3}\|^2} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -19 \\ 97 \end{pmatrix}$$

Test: $Q \in h$?

$$\begin{pmatrix} -19 \\ 97 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix} - \frac{29}{10} \begin{pmatrix} 10 \\ -30 \end{pmatrix} \qquad \checkmark$$

Abstand von P zur Gerade h ergibt sich durch:

$$\text{dist}(P,h) = \|Q-P\| = \frac{1}{10}\| \begin{pmatrix} -19 \\ 97 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 120 \end{pmatrix} \| \approx 7.27$$

Schnittpunkt S der beiden Geraden:

$$\begin{aligned}
& g = h \\
\Leftrightarrow \quad & \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \quad & \\
& 3\,t - 2 = 2 \\
& 5\,t + 3\,s = -1 \\
\Rightarrow \quad & \\
& t = \frac{5}{14} \\
\Rightarrow \quad & S = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{5}{14} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 1 \\ 53 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

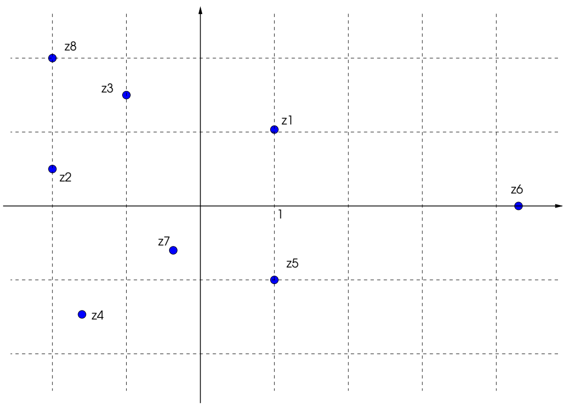
Schnittwinkel der beiden Geraden:

$$\angle(g,h) = \angle\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} \right) = \arccos\left(\frac{\langle \binom{3}{5}, \binom{1}{-3} \rangle}{\|\binom{3}{5}\|\,\|\binom{1}{-3}\|} \right) \approx 0.86(49.4^\circ)$$

Lösung 4:

(a)

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1 + i & z_2 &= -2 + \frac{i}{2} \\
z_3 &= -1 + \frac{3}{2}\,i & z_4 &= -\frac{5}{3} - \frac{3}{2}\,i \\
z_5 &= 1 - i & z_6 &= 4.25 \\
z_7 &= -\frac{1}{17}(6 + 10\,i) & z_8 &= -2 + 2\,i \\
(z_7 &= -0.35 - 0.59\,i)
\end{aligned}$$



(b)

$$\begin{aligned}
z_1 &= |z_1|\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Arg}(z_1)} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\,\frac{\pi}{4}} \\
z_2 &= |z_2|\,\mathrm{e}^{i\,\mathrm{Arg}(z_2)} \approx \frac{1}{2}\sqrt{17}\,\mathrm{e}^{i\,(\pi - 0.24)} \\
&\vdots \quad etc.
\end{aligned}$$