Vektoren im $\mathbb{R}^2$, Darstellung — MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

Gegeben sind die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Komponenten von

$$d = a + 2\,b - \frac{1}{2}c\,.$$

(b) Berechnen Sie das Skalarprodukt $< a, b >$ und den Betrag $\|c\|$.

Aufgabe 2:

(a) Von einem Parallelogramm sind drei aufeinanderfolgende Ecken A, B, C gegeben. Bestimmen Sie die Koordinaten der vierten Ecke D.

$$A = (8, -5)\,, \quad B = (-1, -4)\,, \quad C = (0, 4)$$

(b) Von einem Quadrat $ABCD$ ist die Diagonale $\overline{AC}$ mit $A = (-2, 2)$ und $C = (5, 1)$ gegeben. Berechnen Sie die Koordinaten der Ecken B und D.

Aufgabe 3:

Gegeben seien die Punkte

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Wie lautet die Parameterdarstellung der Gerade g durch die Punkte A und B?

(b) Wie groß ist der Abstand des Punktes X von der Geraden g?

(c) Wie groß ist der Abstand des Punktes X von der Strecke $\overline{AB}$?

(d) Berechnen Sie den Punkt $P \in g$, so dass der Winkel $\angle(X - P, B - A)$ den Wert $\frac{\pi}{4}$ im Bogenmaß hat.

Lösung 1:

(a)

$$d = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(b)

$$< a, b > = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = -1$$

$$\|c\| = \left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$$

Lösung 2:

(a)

$$D = C + A - B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(b) M sei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
& M = \frac{1}{2}(A + C) \\
\Rightarrow \quad & D = M + \frac{1}{2}(C - A)^{\perp} \\
& \quad = \frac{1}{2}(A + C + (C - A)^{\perp}) \\
& \quad = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 + c_1 - c_2 + a_2 \\ a_2 + c_2 + c_1 - a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \\
\wedge \quad & B = M - \frac{1}{2}(C - A)^{\perp} \\
& \quad = \frac{1}{2}(A + C - (C - A)^{\perp}) \\
& \quad = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_1 + c_1 + c_2 - a_2 \\ a_2 + c_2 - c_1 + a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Lösung 3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } X = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a)

$$g: \; A + t\,(B-A) = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

(b) Wie groß ist der Abstand des Punktes X von der Geraden g?

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(X,g) &= \left\| X - A - \frac{< X-A, B-A >}{\|B-A\|^2}(B-A)\right\| \\ &= \left\| \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \frac{\left\langle \binom{2}{3}, \binom{2}{1}\right\rangle}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right\| = \left\| \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix}14\\7\end{pmatrix}\right\| \\ &= \frac{1}{5}\left\| \begin{pmatrix}10\\15\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}14\\7\end{pmatrix}\right\| = \frac{1}{5}\left\| \begin{pmatrix}-4\\8\end{pmatrix}\right\| = \frac{\sqrt{80}}{5} \approx 1.8\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\operatorname{dist}(X,\overline{AB}) = \begin{cases} \operatorname{dist}(X,g) & \text{falls} \quad A + \frac{<X-A,B-A>}{\|B-A\|^2}(B-A) \in \overline{AB} \\ \min\{\|X-B\|, \|X-A\|\} & \text{sonst}\end{cases}$$

Sei Q die orthogonale Projektion von X auf g:

$$\begin{aligned} Q &= A + \frac{< X-A, B-A >}{\|B-A\|^2}(B-A) \\ &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \frac{7}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}19\\12\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Gilt $Q \in \overline{AB}$?

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}19\\12\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{7}{5} > 1 \quad \not\checkmark$$

Also ist

$$\operatorname{dist}(X, \overline{AB} = \|B - X\| = 2$$

(d) Berechnen Sie den Punkt $P \in g$, so dass der Winkel $\angle(X-P, B-A)$ den Wert $\frac{\pi}{4}$ im

Bogenmaß hat.

$$
\begin{aligned}
&& \langle X-P, B-A\rangle^2 &= \|X-P\|^2\|B-A\|^2\cos^2\frac{\pi}{4} \\
\Leftrightarrow && \langle X-A-t\,(B-A), B-A\rangle^2 &= \|X-A-t\,(B-A)\|^2\|B-A\|^2\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow && (7-5\,t)^2 &= (13+5\,t^2-14\,t)\frac{5}{2} && \checkmark \\
\Leftrightarrow && 98+50\,t^2-140\,t &= 65+25\,t^2-70\,t \\
\Leftrightarrow && 25\,t^2-70\,t+33 &= 0 \\
\Leftrightarrow && t_{1,2} &= \frac{7\pm 4}{5} \\
\Rightarrow && P_i &= A+t_i\,(B-A) \\
&& P_1 &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{11}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5.4\\3.2\end{pmatrix} \\
&& P_2 &= \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{3}{5}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.2\\1.6\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$