

Zahlen und Körper

MLAE 1& 2

Aufgabe 1:

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

1. $\forall x \exists y : Lyx$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

2. $\forall x \exists y : Lxy$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

3. _____

Jemand liebt alle.

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

4. $\exists x \forall y : Lyx$

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

5. _____

Jemand liebt sich selbst.

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

6. $\forall x : Lxx$

Alle lieben sich selbst.

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

7. _____

Einer liebt einen.

	a	b	c	d	e
a					
b					
c					
d					
e					

9. $\forall x \forall y : Lxy$

Jeder liebt jeden.

8. _____

Einer wird von einem geliebt.

10. _____

Jeder wird von jedem geliebt.

Erläuterung zu Aufgabe 1¹:

Ein **Prädikat** ist eine Folge von Wörtern mit Leerstellen, die zu einer wahren oder falschen Aussage wird, wenn in jede Leerstelle ein Eigenname eingesetzt wird. Zum Beispiel ist die Wortfolge "... ist ein Mensch" ein Prädikat, weil durch Einsetzen eines Eigennamens - etwa "Sokrates" - ein Aussagesatz, zum Beispiel "Sokrates ist ein Mensch", entsteht. Die Aussage

¹Quelle: Wikipedia - Prädikatenlogik

“Die Erde ist eine Scheibe” lässt sich prädikatenlogisch in den Eigennamen “die Erde” und das Prädikat “... ist eine Scheibe” zerlegen. Anhand der Definition und der Beispiele wird klar, dass der Begriff “Prädikat” in der Logik, speziell in der Prädikatenlogik, nicht dieselbe Bedeutung hat wie in der traditionellen Grammatik, auch wenn historisch und philosophisch ein Zusammenhang besteht. Statt eines Eigennamens kann in das Prädikat auch eine Variable eingesetzt werden, wodurch das Prädikat zu einer Satzfunktion wird: $\varphi(x) =$ “ x ist ein Mensch” ist eine Funktion, die in der klassischen Prädikatenlogik für die Eigennamen derjenigen Individuen, die Menschen sind, den Wahrheitswert wahr ausgibt und für alle anderen den Wahrheitswert falsch.

Das zweite charakteristische Konzept der Prädikatenlogik ist der **Quantor**. Quantoren geben an, von wie vielen Individuen des Diskursuniversums eine Satzfunktion erfüllt wird. Ein Quantor bindet die Variable einer Satzfunktion, so dass wieder ein Satz entsteht. Der Allquantor sagt aus, dass ein Prädikat auf alle Individuen zutreffen soll. Der Existenzquantor besagt, dass ein Prädikat auf mindestens ein Individuum zutrifft. Die Quantoren ermöglichen Aussagen wie “Alle Menschen sind sterblich” oder “Es gibt mindestens einen rosa Elefanten”.

Lxy kann gelesen werden als “ x liebt y ”.

Aufgabe 2:

Welche der Folgenden Mengen sind Körper? Überprüfen Sie die Körperaxiome ($K1$) bis ($K9$). Geben Sie gegebenenfalls neutrales und inverses Element bezüglich Addition und Multiplikation an.

(a) $(\{0, 1, 2\}, \oplus, \odot)$ mit

\oplus	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

\odot	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

(b) $(\{0, 1, 2, 3\}, \oplus, \odot)$ mit

\oplus	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

\odot	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

(c) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ mit

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Aufgabe 3: _____

Es seien $a = 7 - 5i$, $b = 2 + i$ und $c = 8i$ gegeben. Berechnen Sie d mit

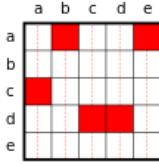
$$\begin{aligned} (a) \quad d &= a + b & (b) \quad d &= b - a & (c) \quad d &= a \cdot b & (d) \quad d &= \frac{b}{a} \\ (e) \quad d &= a + ib - b \cdot a & (f) \quad d &= \operatorname{Re}(a + 4b) & (g) \quad d &= \operatorname{Im}(c - \bar{b}) & (h) \quad d &= \overline{(a - \bar{b})}(\bar{c} + b) \end{aligned}$$

Aufgabe 4: _____

Berechnen Sie folgende Ausdrücke und stellen Sie sie in kartesischer Form $(a+ib)$ dar:

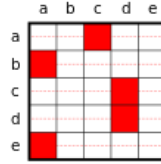
$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{5 + 3i}{2 + 4i} & (b) \quad & \frac{13 - 5i}{1 - i} & (c) \quad & \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}i} \\ (d) \quad & \frac{(1 + 2i)(\overline{1 + 2i})}{5 + 5i} & (e) \quad & \frac{(1 + 3i)(-2 - 3i)}{(3 - i)(2 - 3i)} & (f) \quad & \operatorname{Re} \left(\frac{5 + 2i}{-3 + 5i} \right) \\ (g) \quad & \frac{\operatorname{Re}(5 + 2i)}{\operatorname{Re}(-3 + 5i)} & (h) \quad & \frac{\operatorname{Im}(-3 + 5i)}{\operatorname{Im}(5 + 2i) + \operatorname{Re}(5 + 2i)} \end{aligned}$$

Lösung 1:



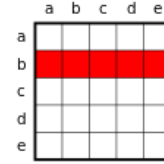
1. $\forall x \exists y : L y x$

Jeder wird von jemandem geliebt.



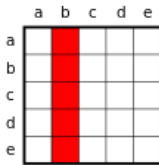
2. $\forall x \exists y : L x y$

Jeder liebt jemanden.



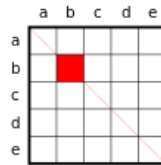
3. $\exists x \forall y : L x y$

Jemand liebt alle.



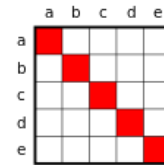
4. $\exists x \forall y : L y x$

Jemand wird von allen geliebt.



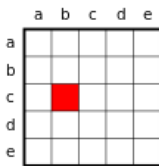
5. $\exists x : L x x$

Jemand liebt sich selbst.



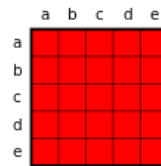
6. $\forall x : L x x$

Alle lieben sich selbst.



7. $\exists x \exists y : L x y$

Einer liebt einen.



9. $\forall x \forall y : L x y$

Jeder liebt jeden.

8. $\exists x \exists y : L y x$

Einer wird von einem geliebt.

10. $\forall x \forall y : L y x$

Jeder wird von jedem geliebt.

Lösung 2:

(a) $(\{0, 1, 2\}, \oplus, \odot)$ ist ein Körper, mit dem neutralen Element 0 bzgl \oplus und 1 bezgl \odot .

(b) $(\{0, 1, 2, 3\}, \oplus, \odot)$ ist kein Körper, denn die 2 besitzt kein multiplikatives Inverses.

(c) $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ ist ein Körper mit

- neutr. Elt. bzgl. Addition: $(0, 0)$
- inv. Elt. bzgl. Addition von (a, b) : $(-a, -b)$
- neutr. Elt. bzgl. Multiplikation: $(1, 0)$
- inv. Elt. bzgl. Multiplikation von (a, b) : $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$

Lösung 3: _____

$$(a) \quad d = 9 - 4i \quad (b) \quad d = -5 + 6i \quad (c) \quad d = 19 - 3i \quad (d) \quad d = \frac{9}{74} + \frac{17}{74}i$$
$$(e) \quad d = -13 \quad (f) \quad d = 15 \quad (g) \quad d = 9 \quad (h) \quad d = 38 - 27i$$

Lösung 4: _____

$$(a) \quad 1.1 - 0.7i \quad (b) \quad 9 + 4i \quad (c) \quad \frac{1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}i$$
$$(d) \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \quad (e) \quad \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i \quad (f) \quad \frac{-5}{34}$$
$$(g) \quad \frac{-5}{3} \quad (h) \quad \frac{5}{7}$$