lineare ODE erster Ordnung $y'(x) = \alpha(x)\,y(x) + g(x)$, AWP: $y(0) = y_a$		
homogen: $g(x) = 0$	inhomogen: $g(x) \neq 0$	
Methode: Trennung der Variablen (TV) Lösung: $y(x) = C\,\mathrm{e}^{\int \alpha(x)\;dx}$	Methode: Zunächst die homogene ODE lösen $\to\ y_0(x)$ und dann für	
	konstante Koeff. $\alpha \neq \alpha(x)$	nicht konstante Koeff. $\alpha = \alpha(x)$
	Methode: Partikulärlsg.[3] (PL) $\to\ y_p(x)$ Lösung: $y(x) = y_0(0) + y_p(x)$ [auch VK mgl.]	Methode: Variation der Konst. $\to\ y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{\int \alpha(x)\;dx}$ Lösung: in $y(x)$ $C(x) = \int g(x)\,\mathrm{e}^{-\int \alpha(x)\;dx}\;dx$
Bei AWPs Konstante so bestimmen, dass $y(0) = y_a$ erfüllt ist		

nicht lineare ODEs substituieren	
homogen: $g(x) = 0$	inhomogen: $g(x) \neq 0$
Je nach Form geeignete Subst. wählen Je nach Form der neuen ODE Methode wählen Rücksubstitution	hom. ODE lösen $\to\ y_0(x)$ dann je nach Form inhom. ODE lösen $\to\ y(x)$

lineare ODEs höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten	
homogen: $g(x) = 0$	inhomogen: $g(x) \neq 0$
Nullstellen des charakt. Polynoms (CP) λ_1 Nullst. mit Vfh 1, λ_k Nullst. mit Vfh s+1 Lösung: $y(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k_{s-1}}x^{s-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_k x} + C_{k_s}x^s\,\mathrm{e}^{\lambda_k x}$	hom. ODE lösen $\to y_0(x)$ dann inhom. mit PL $\to y_p(x)$ Lösung: $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$
Oder: Bei AWP auch Laplace-Transformation möglich	

AWP und RWP bei ODEs zweiter Ordnung AWP: $y''(x) + \alpha\,y'(x) + \beta\,y(x) = g(x)$ auf $\mathbb{R}_0^+$ mit $y(0) = y_a$, $y'(0) = y_b$ RWP: $y''(x) + \alpha\,y'(x) + \beta\,y(x) = g(x)$ auf [a,b] mit $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$
Unterscheidung AWP-RWP zur Best. von C, Lösungsmethode wie oben

Systeme von ODEs erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten als AWP $a\,u' + b\,v = g\,,\ \ u(0) = u_0$ und $c\,v' + d\,u = f\,,\ \ v(0) = v_0$	
homogen: $g(x) = 0$	inhomogen: $g(x) \neq 0$
Eigenwerte λ_i der Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ bestimmen λ_1 Nullst. mit Vfh 1, λ_k Nullst. mit Vfh s+1 Lösung: $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + \cdots + C_{k_{s-1}}x^{s-1}\,\mathrm{e}^{\lambda_k x} + C_{k_s}x^s\,\mathrm{e}^{\lambda_k x}$	PL mit Ansatz $y_p(x) = y_{p,g}(x) + y_{p,f}(x)$ Lösung: $y(x) = y_0(x) + y_p(x)$
Bei $\lambda_j = a_j + i\,b_j \in \mathbb{C}$: $y_0(x) = \cdots \mathrm{e}^{a_j x}(C_{j,1}\cos(b_j\,x) + C_{j,2}\sin(b_j\,x)) \cdots$	

Abbildung 4: Übersicht über die hier behandelten Lösungsmethoden von ODEs

A Tabellen zur Laplace-Transformation

Die nachfolgenden Tabellen zur Laplace-Transformation sind Bronstein (2008[7]) entnommen.

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\,, \quad f(t) = 0 \text{ für } t < 0$$

Die in der Tabelle auftretende Konstante C ist die EULERsche Konstante $C = 0,577216$

$F(p)$	$f(t)$
0	0
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{(p-\alpha)^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\alpha t}$
$\frac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{e^{\beta t} - e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
$\frac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)}$	$\frac{\beta e^{\beta t} - \alpha e^{\alpha t}}{\beta - \alpha}$
$\frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \beta^2}$	$\frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\, t$
$\frac{\alpha}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin \alpha t$
$\frac{\alpha \cos \beta + p \sin \beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\sin(\alpha t + \beta)$
$\frac{p}{p^2 + 2\alpha p + \beta^2}$	$\left(\cos \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\, t - \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \sin \sqrt{\beta^2 - \alpha^2}\, t\right) e^{-\alpha t}$
$\frac{p}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos \alpha t$
$\frac{p \cos \beta - \alpha \sin \beta}{p^2 + \alpha^2}$	$\cos(\alpha t + \beta)$
$\frac{\alpha}{p^2 - \alpha^2}$	$\sinh \alpha t$
$\frac{p}{p^2 - \alpha^2}$	$\cosh \alpha t$

$F(p)$	$f(t)$
$\dfrac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$	$-\dfrac{(\beta-\gamma)\mathrm{e}^{\alpha t}+(\gamma-\alpha)\mathrm{e}^{\beta t}+(\alpha-\beta)\mathrm{e}^{\gamma t}}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}$
$\dfrac{1}{(p-\alpha)(p-\beta)^2}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\alpha t}-[1+(\alpha-\beta)t]\,\mathrm{e}^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$
$\dfrac{p}{(p-\alpha)(p-\beta)^2}$	$\dfrac{\alpha\,\mathrm{e}^{\alpha t}-[\alpha+\beta(\alpha-\beta)t]\mathrm{e}^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$
$\dfrac{p^2}{(p-\alpha)(p-\beta)^2}$	$\dfrac{\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha t}-[2\alpha-\beta+\beta(\alpha-\beta)t]\,\beta\mathrm{e}^{\beta t}}{(\alpha-\beta)^2}$
$\dfrac{1}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{\alpha\sin\beta t-\beta\sin\alpha t}{\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)}$
$\dfrac{p}{(p^2+\alpha^2)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{\cos\beta t-\cos\alpha t}{(\alpha^2-\beta^2)}$
$\dfrac{p^2+2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$	$\cos^2\alpha t$
$\dfrac{2\alpha^2}{p(p^2+4\alpha^2)}$	$\sin^2\alpha t$
$\dfrac{p^2-2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$	$\cosh^2\alpha t$
$\dfrac{2\alpha^2}{p(p^2-4\alpha^2)}$	$\sinh^2\alpha t$
$\dfrac{2\alpha^2 p}{p^4+4\alpha^4}$	$\sin\alpha t\cdot\sinh\alpha t$
$\dfrac{\alpha(p^2+2\alpha^2)}{p^4+4\alpha^4}$	$\sin\alpha t\cdot\cosh\alpha t$
$\dfrac{\alpha(p^2-2\alpha^2)}{p^4+4\alpha^4}$	$\cos\alpha t\cdot\sinh\alpha t$
$\dfrac{p^3}{p^4+4\alpha^4}$	$\cos\alpha t\cdot\cosh\alpha t$
$\dfrac{\alpha p}{(p^2+\alpha^2)^2}$	$\dfrac{t}{2}\sin\alpha t$

$F(p)$	$f(t)$
$\dfrac{\alpha p}{(p^2-\alpha^2)^2}$	$\dfrac{t}{2}\sinh\alpha t$
$\dfrac{\alpha\beta}{(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)}$	$\dfrac{\beta\sinh\alpha t-\alpha\sinh\beta t}{\alpha^2-\beta^2}$
$\dfrac{p}{(p^2-\alpha^2)(p^2-\beta^2)}$	$\dfrac{\cosh\alpha t-\cosh\beta t}{\alpha^2-\beta^2}$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$
$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$
$\dfrac{1}{p^n\sqrt{p}}$	$\dfrac{n!}{(2n)!}\dfrac{4^n}{\sqrt{\pi}}t^{n-\frac{1}{2}}\quad(n>0\,,\ \text{ganz})$
$\dfrac{1}{\sqrt{p+\alpha}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\mathrm{e}^{-\alpha t}$
$\sqrt{p+\alpha}-\sqrt{p+\beta}$	$\dfrac{1}{2t\sqrt{\pi t}}\left(\mathrm{e}^{-\beta t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)$
$\sqrt{\sqrt{p^2+\alpha^2}-p}$	$\dfrac{\sin\alpha t}{t\sqrt{2\pi t}}$
$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\alpha^2}-p}{p^2+\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\sin\alpha t$
$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2+\alpha^2}+p}{p^2+\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\cos\alpha t$
$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2-\alpha^2}-p}{p^2-\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\sinh\alpha t$
$\sqrt{\dfrac{\sqrt{p^2-\alpha^2}+p}{p^2-\alpha^2}}$	$\sqrt{\dfrac{2}{\pi t}}\cosh\alpha t$
$\dfrac{1}{p\sqrt{p+\alpha}}$	$\dfrac{2}{\sqrt{\alpha\pi}}\cdot\displaystyle\int_0^{\sqrt{\alpha t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$
$\dfrac{1}{(p+\alpha)\sqrt{p+\beta}}$	$\dfrac{2\mathrm{e}^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi(\beta-\alpha)}}\cdot\displaystyle\int_0^{\sqrt{(\beta-\alpha)t}}\mathrm{e}^{-\tau^2}\mathrm{d}\tau$

$F(p)$	$f(t)$
$\dfrac{\sqrt{p+\alpha}}{p}$	$\dfrac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{\pi t}} + 2\sqrt{\dfrac{\alpha}{\pi}} \cdot \int\limits_0^{\sqrt{\alpha t}} e^{-\tau^2} d\tau$
$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$J_0(\alpha t)$ (Besselsche Funktion der Ordnung 0)
$\dfrac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}$	$I_0(\alpha t)$ (modifizierte Besselsche Funktion der Ordnung 0)
$\dfrac{1}{\sqrt{(p+\alpha)(p+\beta)}}$	$e^{-\frac{\alpha+\beta}{2}t} \cdot I_0\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}t\right)$
$\dfrac{1}{\sqrt{p^2+2\alpha p+\beta^2}}$	$e^{-\alpha t} \cdot J_0\left(\sqrt{\alpha^2-\beta^2}\,t\right)$
$\dfrac{e^{1/p}}{p\sqrt{p}}$	$\dfrac{\sinh 2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}$
$\arctan\dfrac{\alpha}{p}$	$\dfrac{\sin \alpha t}{t}$
$\arctan\dfrac{2\alpha p}{p^2-\alpha^2+\beta^2}$	$\dfrac{2}{t}\sin\alpha t \cdot \cos\beta t$
$\arctan\dfrac{p^2-\alpha p+\beta}{\alpha\beta}$	$\dfrac{e^{\alpha t}-1}{t}\sin\beta t$
$\dfrac{\ln p}{p}$	$-C-\ln t$
$\dfrac{\ln p}{p^{n+1}}$	$\dfrac{t^n}{n!}[\psi(n)-\ln t]\,, \quad \psi(n) = 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-C$
$\dfrac{(\ln p)^2}{p}$	$(\ln t + C)^2 - \dfrac{\pi^2}{6}$
$\ln\dfrac{p-\alpha}{p-\beta}$	$\dfrac{1}{t}\left(e^{\beta t}-e^{\alpha t}\right)$
$\ln\dfrac{p+\alpha}{p-\alpha} = 2\operatorname{artanh}\dfrac{\alpha}{p}$	$\dfrac{2}{t}\sinh\alpha t$
$\ln\dfrac{p^2+\alpha^2}{p^2+\beta^2}$	$2\cdot\dfrac{\cos\beta t-\cos\alpha t}{t}$
$\ln\dfrac{p^2-\alpha^2}{p^2-\beta^2}$	$2\cdot\dfrac{\cosh\beta t-\cosh\alpha t}{t}$

$F(p)$	$f(t)$
$\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\,,\quad \operatorname{Re}\alpha > 0$	$\dfrac{\alpha}{2\sqrt{\pi}}\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}}{t\sqrt{t}}$
$\dfrac{1}{\sqrt{p}}\mathrm{e}^{-\alpha\sqrt{p}}\,,\quad \operatorname{Re}\alpha \geq 0$	$\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
$\dfrac{\left(\sqrt{p^2+\alpha^2}-p\right)^\nu}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}\,,\quad \operatorname{Re}\nu > -1$	$\alpha^\nu J_\nu(\alpha t)\quad$ (s. S. 398)
$\dfrac{\left(p-\sqrt{p^2-\alpha^2}\right)^\nu}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\,,\quad \operatorname{Re}\nu > -1$	$\alpha^\nu I_\nu(\alpha t)\quad$ (s. S. 399)
$\dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-\beta p}\quad (\beta > 0\,,\ \text{reell})$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ 1 & \text{für } t > \beta \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2+\alpha^2}}}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ J_0\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right) & \text{für } t > \beta \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}}}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ I_0\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right) & \text{für } t > \beta \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{(p+\alpha)(p+\beta)}}}{\sqrt{(p+\alpha)(p+\beta)}}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)\frac{t}{2}} I_0\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{t^2-\beta^2}\right) & \text{für } t > \beta \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2+\alpha^2}}}{p^2+\alpha^2}\left(\beta+\dfrac{1}{\sqrt{p^2+\alpha^2}}\right)$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ \dfrac{\sqrt{t^2-\beta^2}}{\alpha}J_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right) & \text{für } t > \beta \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}}}{p^2-\alpha^2}\left(\beta+\dfrac{1}{\sqrt{p^2-\alpha^2}}\right)$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ \dfrac{\sqrt{t^2-\beta^2}}{\alpha}I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right) & \text{für } t > \beta \end{cases}$
$\mathrm{e}^{-\beta p}-\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2+\alpha^2}}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ \dfrac{\beta\alpha}{\sqrt{t^2-\beta^2}}J_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right) & \text{für } t > \beta \end{cases}$
$\mathrm{e}^{-\beta\sqrt{p^2-\alpha^2}}-\mathrm{e}^{-\beta p}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t < \beta \\ \dfrac{\beta\alpha}{\sqrt{t^2-\beta^2}}I_1\left(\alpha\sqrt{t^2-\beta^2}\right) & \text{für } t > \beta \end{cases}$

$F(p)$	$f(t)$
$\dfrac{1-\mathrm{e}^{-\alpha p}}{p}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } t > \alpha \\ 1 & \text{für } 0 < t < \alpha \end{cases}$
$\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha p}-\mathrm{e}^{-\beta p}}{p}$	$\begin{cases} 0 & \text{für } 0 < t < \alpha \\ 1 & \text{für } \alpha < t < \beta \\ 0 & \text{für } t > \beta \end{cases}$

Permutationen sind Variationen der Anordnung von Elementen. P_n beschreibt die Anzahl möglicher Anordnungen von n Elementen.

n verschiendenen Elemente:	$P_n = n!$
Unter den n Elementen gibt es I Gruppen mit jeweil k_i, $i = 1, \dots, I$ gleichen Elementen:	$P_n^{(k_1,\dots,k_I)} = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{I} k_i!}$

Kombinationen und **Variationen** beschreiben die Anzahl Möglichkeiten, die sich aus **Urnenmodellen** "k aus n" ergeben

	ohne Wiederholungen	mit Wiederholungen
ohne Reihenfolge Kombinationen	$C_n^{(k)} = \binom{n}{k}$	$C_n^{(k)} = \binom{n+k-1}{k}$
mit Reihenfolge Variationen	$V_n^{(k)} = k!\,\binom{n}{k}$	$V_n^{(k)} = n^k$

Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Rechenregeln

Axiome von Kolmogorow

(Ko$_1$) Wertebereich $\quad 0 \leq P(A) \leq 1$

(Ko$_2$) sicheres Ereignis $\quad P(\Omega) = 1$

(Ko$_3$) A,B unvereinbar, d.h. $A \cap B = \emptyset$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

Folgerungen daraus

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

allgemein für $B \subseteq A$ $\quad P(A \setminus B) = P(A) - P(B) \geq 0$

$\Leftrightarrow$ $\quad P(A) \geq P(B)$

Additionssatz $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow$ $\quad P(\emptyset) = 0$

A und B unabhängig:$\Leftrightarrow$ $\quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

bedingte Wk

"wie wahrscheinlich ist A unter der Bedingung von B?" $\quad P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$

totale Wk $\quad P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|\overline{A})\,P(\overline{A})$

Satz von Bayes $\quad P(A|B) = P(B|A)\,P(A)/P(B)$

Beispiel einer Umformulierungsmöglichkeit:

Die Wk, ein defektes Teil (D) von der Firma (L1) zu erhalten ist: $P(D|L_1)$

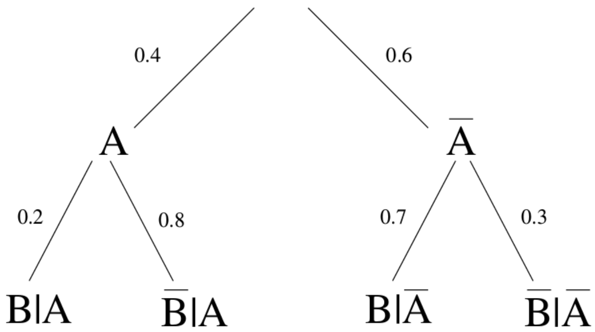
Die Wk, dass Firma (L1) das defekte Teil lieferte: $P(L_1|D)$

Beispiel einer Wk:

Laplace-Wk $$P(A) = \frac{\text{Anzahl günstiger Fälle}}{\text{Anzahl möglicher Fälle}}$$

Lässt sich dann auf diese Weise aufstellen, wenn die mäglichen Fälle gleichermaßen möglich sind (kein gezinkter Würfel hier!)

Baumdiagramm



Multiplikation entlag der Pfade

$$\begin{aligned} P(B|A) \cdot P(A) &= 0.4 \cdot 0.2 = 0.08 \\ P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) &= 0.6 \cdot 0.7 = 0.42 \end{aligned}$$

Addition der Pfadrereignisse

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \\ &= 0.08 + 0.42 = 0.5 \end{aligned}$$

Abbildung	1. Ableitung	2. Ableitung
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$	Gradient $\nabla f = \begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix}$	Hessematrix $Hf =$ $\begin{pmatrix} f_{x_1x_1} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{x_nx_1} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{pmatrix}$
		Laplace $\Delta f = \sum_{i=1}^n f_{x_ix_i}$
Bemerkung: Der Gradient zeigt in Richtung des steilsten Anstiegs Der Laplace ist die Divergenz des Gradienten: $\Delta f = \nabla \cdot \nabla f$ und die Spur der Hessematrix: $\Delta f = \mathrm{Spur} Hf$		
	Richtungsableitungen	
$v, w \in \mathbb{R}^n$, $\lVert w \rVert = \lVert v \rVert = 1$	$f_v = \nabla f \cdot v$	$f_{vw} = v^T\, Hf\, w$
$u, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $\lVert u(x) \rVert = \lVert g(x) \rVert = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$	$f_{u(x)}(x) = \nabla f(x) \cdot u(x)$	$f_{u(x)g(x)} =$ $u(x)^T\, Hf(x)\, g(x)$ $+\nabla f(x)^T Du\, g(x)$
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ $t \mapsto \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{pmatrix}$	$g'(t) = \begin{pmatrix} g_1'(t) \\ \vdots \\ g_m'(t) \end{pmatrix}$	$g''(t) = \begin{pmatrix} g_1''(t) \\ \vdots \\ g_m''(t) \end{pmatrix}$
Bemerkung: Alle Ableitungen werden kptw durchgeführt		
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$	Jacobi-Matrix $Df =$ $\begin{pmatrix} f_{1,x_1} & \cdots f_{1,x_n} \\ \vdots & \cdots \vdots \\ f_{m,x_1} & \cdots f_{m,x_n} \end{pmatrix}$	
Bemerkung: Die Jacobi-Matrix des Gradienten ist die Hessematrix: $D\nabla f = Hf$		
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	Divergenz $\nabla \cdot f = \sum_{i=1}^n f_{i,x_i}$	
Bemerkung: Die Divergenz ist die Spur der Jacobi-Matrix		
	Rotation $\mathrm{rot} f = \nabla \times f$	
Kettenregel:	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ $\frac{d}{dt}(f \circ g)(t) = \sum_{i=1}^n f_{g_i}(g)\, g_i'(t) = \nabla f(g) \cdot g'(t)$	

Abbildung 13: Übersicht der verschiendenen Differentialoperatoren