School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt 12: Selbsttest **MAE 4**

Aufgabe 1:

Es seien die Funtkionen

$$f(x,y) = \sqrt{1-x^2+y^3}\,,\; g(x,y,z) = x+y\,z+x\,y^2\,z^3 \quad \text{und} \quad u(x_1,x_2,x_3) = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1+x_3 \\ x_1\,x_2\,x_3 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $f_x\,,\; f_{yx}\,,\; g_{xyz}$.

(b) Berechnen Sie die Hessematrix von f.

(c) Berechnen Sie die Jacobi-Matrix und die Divergenz von u.

(d) Berechnen Sie den Gradienten und den Laplace von g.

(e) Berechnen Sie die Ableitung

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)\,,$$

wobei

$$g(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}\,,\; f(x_1,x_2) = x_1\,x_2$$

ist mit (i) und ohne (ii) Hilfe der Kettenregel.

Aufgabe 2:

Es sei

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3\,x\,y\,.$$

Gesucht sind alle lokalen Extremalstellen der Funktion f.

(a) Berechnen Sie alle kritischen Stellen von f.

(b) Berechnen Sie die Hessematrix von f.

(c) Prüfen Sie die Hessematrix auf Definitheit bei den kritischen Stellen und geben Sie die Methode, die Sie dazu gewählt haben an.

(d) Geben Sie bei allen gefundenen kritischen Stellen an, ob diese Maxima oder Minima von f darstellen.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie mittels Lagrange-Funktion unter allen Zylindern mit gleicher Oberfläche jenen mit größtem Volumen.

Aufgabe 4:

Es ist die Gleichung

$$\varrho_t + \nabla \cdot (\varrho\, u) = f \qquad \text{in } \mathbb{R}_0^+ \times \Omega\,,\ \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

gegeben und es gelte

$$\varrho(t,x) = \frac{t\, x^2}{16} \quad \text{und} \quad u(t,x) = -x\,.$$

Dabei ist $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Zu welchem Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist $f = 0$?

Lösung 1:

(a)

$$f_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2+y^3}} \qquad f_y = \frac{3\,y^2}{2\,\sqrt{1-x^2+y^3}}$$

$$f_{yx} = \frac{3}{4}\,\frac{x\,y^2}{\sqrt{1-x^2+y^3}^3} \qquad g_x = 1+y^2 z^3$$

$$g_{xy} = 2\,y\,z^3 \qquad g_{xyz} = 6\,y\,z^2$$

(b)

$$f_{xx} = \frac{-(1+y^3)}{\sqrt{1-x^2+y^3}^3} \qquad f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_{yy} = \frac{3\,y\,(1-x^2)+\frac{3}{4}\,y^4}{\sqrt{1-x^2+y^3}^3}$$

Damit gilt dann

$$Hf = \frac{1}{\sqrt{1-x^2+y^3}^3}\,\begin{pmatrix} -(1+y^3) & \frac{3}{4}\,x\,y^2 \\ \frac{3}{4}\,x\,y^2 & 3\,y\,(1-x^2)+\frac{3}{4}\,y^4 \end{pmatrix}$$

(c) Jacobi-Matrix:

$$Du = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ x_2\,x_3 & x_1\,x_3 & x_1\,x_2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla\cdot u = x_1\,x_2$$

(d)

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 1+y^2\,z^3 \\ z+2\,x\,y\,z^3 \\ y+3\,x\,y^2\,z^2 \end{pmatrix} \qquad \Delta g = 2\,x\,z^3+6\,x\,y^2\,z$$

(e) (i)

$$\frac{d}{dt}(f\circ g) = \nabla f\cdot g' = \begin{pmatrix} g_2 \\ g_1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} = g_2\,\cos t - g_1\,\sin t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

(ii)

$$\frac{d}{dt}(f\circ g) = \frac{d}{dt}(g_1(t)\,g_2(t)) = \frac{d}{dt}(\sin t\,\cos t) = \cos^2 t - \sin^2 t$$

Lösung 2:

(a) kritischen Stellen von f:

$$\nabla f = 3 \begin{pmatrix} x^2 - y \\ y^2 - x \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{array}{lll} \Leftrightarrow & y = 0 & \wedge \quad x = 0 \\ \vee & y = 1 & \wedge \quad x = 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$

$$K_1 = (0,0)\,,\ K_2 = (1,1)$$

(b) Hessematrix von f:

$$Hf(x,y) = 3 \begin{pmatrix} 2\,x & -1 \\ -1 & 2\,y \end{pmatrix}$$

(c) Definitheit von Hf bei den kritischen Stellen.

$$Hf(K_1) = 3 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{indefinit, Eigenwerte } \pm 1$$

$$\text{und} \qquad Hf(K_2) = 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{positiv definit, Hurwitz}$$

(d)

$$K_{2,\min} = (1,1)$$

Lösung 3:

Der Zylinder habe Höhe h und Radius r.

Oberfläche:

$$O(r,h) = 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,h = C \qquad \text{Nebenbedingung, (konstant)}$$

Volumen:

$$V(r,h) = \pi\,r^2\,h \qquad \text{zu maximieren}$$

Lagrange-Funktion:

$$\Lambda(r,h,\lambda) = \pi\,r^2\,h + \lambda\,(2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,h - C)$$

$$\Rightarrow \quad \nabla\Lambda(r,h,\lambda) = \begin{pmatrix} 2\,\pi\,r\,h + \lambda\,(4\,\pi\,r + 2\,\pi\,h) \\ \pi\,r^2 + \lambda\,(2\,\pi\,r) \\ 2\,\pi\,r^2 + 2\,\pi\,r\,h - C \end{pmatrix}$$

1. Zeile führt auf

$$r = -\frac{h\,\lambda}{h + 2\,\lambda}$$

Eingesetzt in die 2. Zeile führt auf

$$h = -4\,\lambda \quad \Rightarrow \quad r = -2\,\lambda$$

Eingesetzt in die 3. Zeile führt auf

$$\begin{aligned} & \lambda = -\sqrt{\frac{C}{24\,\pi}} && (h \text{ sollte positiv sein}) \\ \Rightarrow \quad & h = 2\,\sqrt{\frac{C}{6\,\pi}} \quad \wedge \quad r = \sqrt{\frac{C}{6\,\pi}} \end{aligned}$$

Das Volumen ist dann

$$V(C) = \frac{C}{3}\,\sqrt{\frac{C}{6\,\pi}}$$

und die Oberfläche wie erwartet

$$O(C) = C\,.$$

Lösung 4:

$$\begin{aligned} \varrho_t + \nabla\cdot(\varrho\,u) &= \left(\frac{t\,x^2}{16}\right)_t - \nabla\cdot\left(\frac{t\,x^2}{16}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(x^2 - \nabla\cdot\left(t\,x^2\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(x^2 - t\,\left(\left(x^2\,x_1\right)_{x_1} + \left(x^2\,x_2\right)_{x_2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(x^2 - t\,\left(2\,x_1^2 + x^2 + 2\,x_2^2 + x^2\right)\right) \\ &= \frac{1}{16}\left(x^2 - t\,4\,x^2\right) \\ &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad t &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$