Blatt 11: Differentiationen im $\mathbb{R}^n$ MAE 3

Aufgabe 1:

(a) Gibt es eine Funktion $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla u = \begin{pmatrix} x^2 + 2\,y \\ 2\,x + 1 \end{pmatrix} ?$$

Wenn ja, wie lauten diese? (Geben Sie alle an!)

(b) Wie sieht es mit

$$\nabla w = \begin{pmatrix} yz + 2x \\ xz + 1 \\ xy \end{pmatrix}$$

aus?

(c) Und gibt es ein $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$\nabla v = \begin{pmatrix} yz + x \\ 2xz + 1 \\ xy \end{pmatrix} ?$$

Aufgabe 2:

Die Gleichung eines idealen Gases

$$p = R\,\frac{T}{V}$$

erlaubt es, jede Variable als Funktion der anderen Variablen darzustellen. $p = p(V)$, $V = V(T)$, etc. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial V} = -1$$

gilt. Anmerkung: Ableitungen nach R tauchen nicht auf, weshalb diese Variable als Parameter betrachtet werden kann.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie die partielle Ableitung nach x der Funktion $z = z(x, y)$, die durch folgende Gleichung bestimmt wird:

$$y\,z - \ln z = x + y$$

Aufgabe 4:

Sei $x \in \mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

$$\left(\frac{x_j}{\|x\|}\right)_{x_i} .$$

Aufgabe 5:

Es sei $u\ :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $u(x) = x_1^2 + 2\,x_1\,x_2$.

(a) Skizzieren Sie Kreisbögen $\partial B_{\|x\|}(0)$.

(b) Wie lauten normierte Normale $\nu(x)$ und Tangente $\tau(x)$ am Kreisbogen $\partial B_{\|x\|}(0)$ in $x \in \mathbb{R}^2$?

(c) Berechnen Sie

  (i) den Gradienten von u: ∇u,

  (ii) den Laplace von u: Δu,

  (iii) die Hessematrix von u: Hu,

  (iv) die Jacobi-Matrix von τ.

(d) Berechnen Sie die zweite Richtungsableitung

$$u_{\tau\tau} .$$

(e) Berechnen Sie

$$u_{\nu\nu} .$$

(f) Überzeugen Sie sich davon, dass

$$u_{\nu(x)\nu(x)} + u_{\tau(x)\tau(x)}$$

hier nicht gleich dem Laplace ist. Das gilt nur für konstante Richtungen $\nu \neq \nu(x)$ und $\tau \neq \tau(x)$.

Aufgabe 6:

Die Weihnachtswichtel haben sich mal wieder einen Scherz erlaubt: Sie haben in der Weihnachtsbäckerei die Beschriftungen an den Zutaten vertauscht. Nun steht der Weihnachtsmann vor drei Säcken und will wieder für Ordnung sorgen. In einem Sack sind Mandeln (M), in einem anderen Sack sind Walnüsse (W), und im dritten Sack ist eine Mischung aus Mandeln und Walnüssen (G). Die Wichtel haben die drei Schilder an den Säcken vertauscht, so dass keines mehr am richtigen Sack hängt. Der Weihnachtsmann greift, ohne in den Sack hineinzusehen, in einen bestimmten der drei Säcke und holt eine einzelne Frucht heraus. Sofort weiß er mit Sicherheit, welches Schild an welchen Sack gehört. Welches (falsche) Schild hängt an dem Sack, in den der Weihnachtsmann gegriffen hat?

Lösung 1:

(a)

Es ist

$$u(x,y) = \int x^2 + 2\,y\,dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\,x\,y + C(y)$$

und

$$u(x,y) = \int 2\,x + 1\,dy = 2\,x\,y + y + C(x)$$

also zusammen

$$u(x,y) = \frac{1}{3}x^3 + 2\,x\,y + y + C$$

(b)

$$w(x,y,z) = \int yz + 2x\,dx = xyz + x^2 + C(y,z)$$
$$w(x,y,z) = \int xz + 1\,dy = xyz + y + C(x,z)$$
$$w(x,y,z) = \int xy\,dz = xyz + C(x,y)$$

zusammen

$$w(x,y,z) = xyz + x^2 + y + C$$

(c)

$$v(x,y,z) = \int yz + 2\,x\,dx = xyz + x^2 + C(y,z)$$
$$v(x,y,z) = \int 2xz + 1\,dy = 2xyz + y + C(x,z)$$
$$v(x,y,z) = \int xy\,dz = xyz + C(x,y)$$

Das kriegt man nicht zusammen! Hier gibt es keine Lösung!

Lösung 2:

$$
\begin{aligned}
V(T) &= R\frac{T}{p} && \Rightarrow && V_T = \frac{R}{p} \\
T(p) &= \frac{p\,V}{R} && \Rightarrow && T_p = \frac{V}{R} \\
p(V) &= R\frac{T}{V} && \Rightarrow && p_V = -\frac{T}{V^2}\,R
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial T}\,\frac{\partial T}{\partial p}\,\frac{\partial p}{\partial V} &= V_T\,T_p\,p_V \\
&= -\frac{R}{p}\cdot\frac{V}{R}\cdot\frac{T}{V^2}\,R \\
&= -\frac{R\,T}{p\,V} = -\frac{p}{p} = -1
\end{aligned}
$$

Lösung 3:

$$
\begin{aligned}
& & y\,z - \ln z &= x + y \\
\Rightarrow & & (y\,z - \ln z)_x &= (x+y)_x \\
\Leftrightarrow & & y\,z_x - \frac{z_x}{z} &= 1 \\
\Leftrightarrow & & z_x &= \frac{z}{y\,z-1}
\end{aligned}
$$

Beachten Sie: $y \neq y(x)$ hängt nicht von x ab, nur $z = z(x,y)$.

Lösung 4:

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{x_j}{\|x\|}\right)_{x_i} &= \frac{(x_j)_{x_i}\|x\| - x_j\|x\|_{x_i}}{\|x\|^2} \\
&= \frac{\delta_{ji}\|x\| - x_j\,\frac{x_i}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\
&= \frac{\delta_{ji}\|x\|^2 - x_j\,x_i}{\|x\|^3} \\
&= \frac{1}{\|x\|^3}\begin{cases} x_2^2 & \text{für} \quad i=j=1 \\ x_1^2 & \text{für} \quad i=j=2 \\ -x_1\,x_2 & \text{für} \quad i\neq j \end{cases}
\end{aligned}
$$

Lösung 5:

(a) ...

(b)

$$\nu = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|}\ ,\ \tau = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|}$$

(c) (i)

$$\nabla u = 2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(ii)

$$\Delta u = u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} = 2$$

(iii)

$$Hu = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

(iv)

$$\begin{aligned} D\tau &= \begin{pmatrix} -\left(\frac{x_2}{\|x\|}\right)_{x_1} & -\left(\frac{x_2}{\|x\|}\right)_{x_2} \\ \left(\frac{x_1}{\|x\|}\right)_{x_1} & \left(\frac{x_1}{\|x\|}\right)_{x_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{x_1 x_2}{\|x\|^3} & -\frac{x_1^2}{\|x\|^3} \\ \frac{x_2^2}{\|x\|^3} & \frac{-x_1\, x_2}{\|x\|^3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|^3} \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1\, x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(d) Zweite Richtungsableitung mit der Formel:

$$u_{\tau\tau} = \underbrace{\tau^T H u \tau}_{=:I} + \underbrace{\nabla u^T\, D\tau\, \tau}_{=:II}$$

$$\begin{aligned} I &:= \tau^T H u \tau \\ &= \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^T \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|} \\ &= \frac{2}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\|x\|^2} (x_2^2 - 2x_1 x_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
II &:= \nabla u^T \, D\tau \, \tau \\
&= 2 \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^T \frac{1}{\|x\|^3} \begin{pmatrix} x_1 x_2 & -x_1^2 \\ x_2^2 & -x_1 \, x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|} \\
&= -\frac{2}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(x_2^2 + x_1^2) \\ x_2(x_2^2 + x_1^2) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{2}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{2}{\|x\|^2} \, (x_1^2 + 2 \, x_1 x_2)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{u_{\tau\tau} = \frac{2}{\|x\|^2}(x_2^2 - 2x_1 x_2) - \frac{2}{\|x\|^2} \, (x_1^2 + 2 \, x_1 x_2) = \frac{2}{\|x\|^2}(x_2^2 - 4x_1 x_2 - x_1^2)}$$

(e) analog zu (d):

$$u_{\nu\nu} = \underbrace{\nu^T H u \nu}_{=:I} + \underbrace{\nabla u^T \, D\nu \, \nu}_{=:II}$$

$$\begin{aligned}
I &:= \nu^T H u \nu \\
&= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \frac{1}{\|x\|} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\|x\|} \\
&= \frac{2}{\|x\|^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\|x\|^2}(x_1^2 + 2x_1 x_2)
\end{aligned}$$

$$D\nu = \begin{pmatrix} \left(\frac{x_1}{\|x\|}\right)_{x_1} & \left(\frac{x_1}{\|x\|}\right)_{x_2} \\ \left(\frac{x_2}{\|x\|}\right)_{x_1} & \left(\frac{x_2}{\|x\|}\right)_{x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\|x\|^3} \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
II &:= \nabla u^T \, D\nu \, \nu \\
&= \frac{2}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_2^2 & -x_1 x_2 \\ -x_1 x_2 & x_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{2}{\|x\|^4} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 x_2^2 - x_1 x_2^2 \\ -x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{u_{\nu\nu} = \frac{2}{\|x\|^2}(x_1^2 + 2x_1x_2)}$$

(f)

$$\begin{aligned} u_{\tau\tau} + u_{\nu\nu} &= \frac{2}{\|x\|^2}(x_2^2 - 4x_1x_2 - x_1^2) + \frac{2}{\|x\|^2}(x_1^2 + 2x_1x_2) \\ &= \frac{2}{\|x\|^2}(x_2^2 + x_1^2 - (2x_1x_2 + x_1^2)) = \underbrace{2}_{=\Delta u} - 2\,\frac{2x_1x_2 + x_1^2}{\|x\|^2} \neq \Delta u \end{aligned}$$

Lösung 6:

G