Blatt 10: Differentiation im $\mathbb{R}^n$ — MAE 3

Aufgabe 1:

Berechnen Sie jeweils das totale Differential von

$$(a) \quad f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad (b) \quad f(x,y) = 3\,x^4 - 7\,x\,y + x$$

$$(c) \quad f(x,y) = 2\,x\,\sin y + 3\,x\,y \qquad (d) \quad f(x,y) = \frac{y}{x^2+1}$$

Aufgabe 2:

Berechnen Sie jeweils das totale Differential im Punkt $P = (1,1,1)$.

$$(a) \quad f(x,y,z) = x\,y\,z \qquad (b) \quad f(x,y,z) = \ln(x\,y\,z) \qquad (c) \quad f(x,y,z) = \mathrm{e}^{x^2+y^2+y^2}$$

Aufgabe 3:

Berechnen Sie von f

(a) den Gradient: $u(s_1, s_2) = \tan s_1 + \ln\left(s_2^2\right)$

(b) die Divergenz & die Jacobi-Matrix: $\gamma(x_1,x_2) = 2\left(\begin{smallmatrix}\cos(x_1+x_2)\\ \sin(x_1 \cdot x_2)\end{smallmatrix}\right)$

(c) die Hessematrix & den Laplace: $g(\alpha,\beta) = \ln\alpha \cdot \cos\beta$

Aufgabe 4:

Beweisen Sie, dass $\nabla \cdot \nabla f = \Delta f$.

Lösung 1:

$$(a)\quad df = 2x\,dx + 2y\,dy \qquad (b)\quad df = (12x^3 - 7y + 1)\,dx - 7x\,dy$$

$$(c)\quad df = (2\sin y + 3y)\,dx + (2x\cos y + 3x)\,dy \qquad (d)\quad df = -\frac{2xy\,dx}{(x^2+1)^2} + \frac{dy}{x^2+1}$$

Lösung 2:

$$(a)\quad df = dx + dy + dz \qquad (b)\quad df = dx + dy + dz \qquad (c)\quad df = 2\,\mathrm{e}^3\,(dx + dy + dz)$$

Lösung 3:

(a)

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \frac{1}{\cos^2 s_1} \\ \frac{2}{s_2} \end{pmatrix}$$

(b) Jacobi:

$$J\gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{1,x_1} & \gamma_{1,x_2} \\ \gamma_{2,x_1} & \gamma_{2,x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\,\sin(x_1+x_2) & -2\,\sin(x_1+x_2) \\ x_2\,\cos(x_1\cdot x_2) & x_1\,\cos(x_1\cdot x_2) \end{pmatrix}$$

Divergenz:

$$\nabla\cdot\gamma = -2\,\sin(x_1+x_2) + x_1\,\cos(x_1\cdot x_2)$$

(c) Hesse:

$$Hg = \begin{pmatrix} g_{\alpha\alpha} & g_{\alpha\beta} \\ g_{\beta\alpha} & g_{\beta\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\cos\beta}{\alpha^2} & \frac{-\sin\beta}{\alpha} \\ \frac{-\sin\beta}{\alpha} & -\ln\alpha\cos\beta \end{pmatrix}$$

Laplace:

$$\Delta g = g_{\alpha\alpha} + g_{\beta\beta} = -\cos\beta\left(\frac{1}{\alpha^2} + \ln\alpha\right)$$

Lösung 4:

$$\nabla\cdot\nabla f = \nabla\cdot\begin{pmatrix} f_{x_1} \\ \vdots \\ f_{x_n} \end{pmatrix} = f_{x_1x_1} + \cdots + f_{x_nx_n} = \Delta f$$

□