Lösung 1:

(a)

in $\mathring{D}$:

$$\begin{aligned} & f(x,y) = (y-x^2)\,(y-2\,x^2) \\ \Rightarrow \quad & f_x(x,y) = -2\,x\,(y-2\,x^2) - 4\,x\,(y-x^2) \\ & \qquad = -2\,x\,((y-2\,x^2)+2\,(y-x^2)) \\ & \qquad = -2\,x\,(y-2\,x^2+2\,y-2\,x^2) \\ & \qquad = -2\,x\,(3\,y-4\,x^2) \\ \text{und} \quad & f_y(x,y) = y-2\,x^2+y-x^2 \\ & \qquad = 2\,y-3\,x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \nabla f = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & 2\,y-3\,x^2 = 0 \quad \wedge \quad -2\,x\,(3\,y-4\,x^2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & y = \frac{3}{2}\,x^2 \quad \wedge \quad x = 0 \vee y = \frac{4}{3}\,x^2 \\ \Rightarrow \quad & (x,y) = (0,0) \end{aligned}$$

Hessematrix:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2\,(3\,y-4\,x^2) - 2\,x\,(-8\,x) \\ &= -6\,(y-4\,x^2) \\ f_{xy}(x,y) &= -6\,x \\ f_{yy}(x,y) &= 2 \\ \Rightarrow \quad Hf(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{keine Aussage möglich} \end{aligned}$$

Wir müssen untersuchen welchen Wert f bei $(0,0)$ und in unmittlebarer Nähe, also bei $f(\pm\epsilon,\pm\epsilon)$ annimmt.

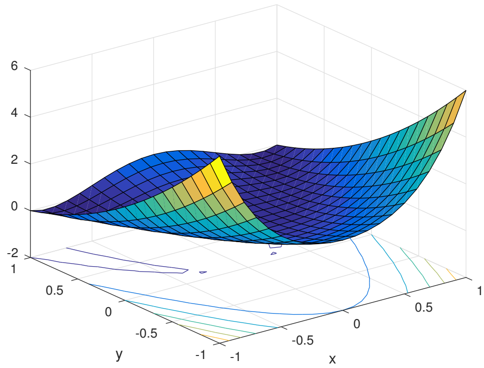
$$f(0,0) = 0 \quad \text{und für } \epsilon > 0 \text{ gilt}$$

$$f(\pm\epsilon,\pm\epsilon) = (\pm\epsilon-\epsilon^2)\,(\pm\epsilon-2\,\epsilon^2) = \epsilon^2 \mp\, 3\,\epsilon^3 + 2\,\epsilon^4 = \epsilon^2(1 \mp\, 3\,\epsilon + 2\,\epsilon^2) > 0$$

Damit befindet sich bei

$$K_{1,\min} = (0,0)$$

ein lokales Minimum.



auf S_1 mit $S_1 = [-1,1] \times \{-1\}$

$$\begin{aligned} f_x(x, y=-1) = 2\,x\,(3 + 4\,x^2) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x = 0 \\ f_{xx}(x=0, y=-1) = 6 + 24\,x^2\big|_{x=1} > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad K_2 = (0,-1) \end{aligned}$$

K_2 ist ein lokales Minimum auf S_1. Ist es auch ein lokales Minimum auf D?

$$\nabla f(K_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\,x\,(3\,y - 4\,x^2)\big|_{K_2} = 0$$

Das liefert keine Aussage, also schauen wir uns die nähere Umgebung an:

$$f(0,-1) = 1$$

und für sehr kleine $\epsilon > 0$ gilt

$$f(\pm\epsilon, -1+\epsilon) = (-1 + \epsilon - \epsilon^2)\,(-1 + \epsilon - 2\,\epsilon^2) = 1 - 2\epsilon + 6\epsilon^2 - 3\epsilon^3 < 1$$

Damit handelt es sich bei K_2 nicht um ein lokales Extremum.

auf S_2 mit $S_2 = [-1,1] \times \{1\}$

$$\begin{aligned} f_x(x, y=1) = -2\,x\,(3 - 4\,x^2) = 0 \qquad &\Leftrightarrow \qquad x \in \left\{0, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \\ f_{xx}(x=0, y=1) = -6 < 0 \qquad &\Rightarrow \qquad K_3 = (0,1) \\ f_{xx}(x=\sqrt{3}/2, y=1) = -\sqrt{3}\,(-4\,\sqrt{3}) > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad K_4 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right) \\ f_{xx}(x=-\sqrt{3}/2, y=1) = -\sqrt{3}\,(-4\,\sqrt{3}) > 0 \qquad &\Rightarrow \qquad K_5 = \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, 1\right) \end{aligned}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} -2\,x\,(3\,y - 4\,x^2) \\ 2\,y - 3\,x^2 \end{pmatrix}$$

K_3 ist lokales Maximum und K_4 und K_5 sind lokale Minima auf S_2. Wie sieht es bezüglich D aus?

$$\begin{aligned}
\nabla f(K_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= (-2\,y + 3\,x^2)\big|_{K_3} = -2 < 0 \\
\nabla f(K_4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= (-2\,y + 3\,x^2)\big|_{K_4} = \frac{1}{4} > 0 \\
\nabla f(K_5) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} &= (-2\,y + 3\,x^2)\big|_{K_5} = \frac{1}{4} > 0
\end{aligned}$$

Damit haben wir zusammen in D:

$$K_{3,\max} = (0,1)\,,\ K_{4,\min} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)\,,\ K_{5,\min} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\right)$$

auf S_4 mit $S_4 = \{-1\} \times [-1,1]$

$$f_y(x=-1,y) = 2\,y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2} \notin D$$

Es gibt kein lokales Extremum auf S_4.

auf S_5 mit $S_5 = \{1\} \times [-1,1]$

$$f_y(x=1,y) = 2\,y - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{3}{2} \notin D$$

Es gibt kein lokales Extremum auf S_5.

Ecken: Bleiben nun noch die Ecken zu untersuchen.

$$K_6 = (-1,-1) \qquad \nabla f(K_6)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -f_x(-1,-1) > 0$$
$$\nabla f(K_6)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -f_y(-1,-1) > 0 \qquad \text{Max}$$
$$K_7 = (1,-1) \qquad \nabla f(K_7)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f_x(1,-1) > 0$$
$$\nabla f(K_7)\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} = -f_y(1,-1) > 0 \qquad \text{Max}$$
$$K_8 = (1,1) \qquad \nabla f(K_8)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = f_x(1,1) > 0$$
$$\nabla f(K_8)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f_y(1,1) < 0 \qquad \text{kein E}$$
$$K_9 = (-1,1) \qquad \nabla f(K_9)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = -f_x(-1,1) > 0$$
$$\nabla f(K_9)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = f_y(-1,1) < 0 \qquad \text{kein E}$$

Insgesamt haben wir folgende Extremalstellen gefunden:

$$K_{1,\min} = (0,0)\,,\ K_{3,\max} = (0,1)\,,\ K_{4,\min} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)\,,\ K_{5,\min} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},1\right)\,,\ K_{6,\mathrm{Max}} = (-1,-1)\,,\ K$$

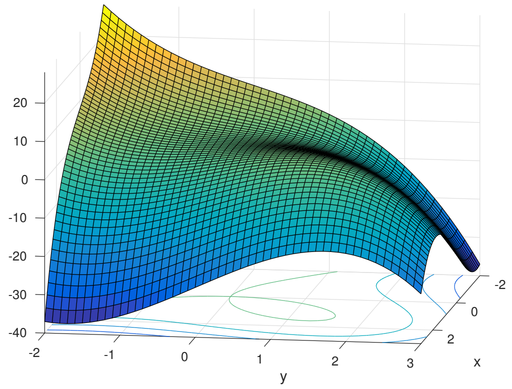
(b)

$$\nabla f = 3\begin{pmatrix}y-x^2\\x-y^2\end{pmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad K_1 = (0,0)\,,\ K_2 = (1,1)$$
$$Hf = \begin{pmatrix}-6\,x & 3\\3 & -6\,y\end{pmatrix}$$
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix}0 & 3\\3 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{hat EWe } \pm 3 \qquad \text{indefinit}$$
$$Hf(1,1) = \begin{pmatrix}-6 & 3\\3 & -6\end{pmatrix} \qquad \text{st. ZSK} \qquad \text{neg. definit}$$

Es gibt also ein lokales Maximum im Punkt

$$K_{2,\max} = (1, 1)$$

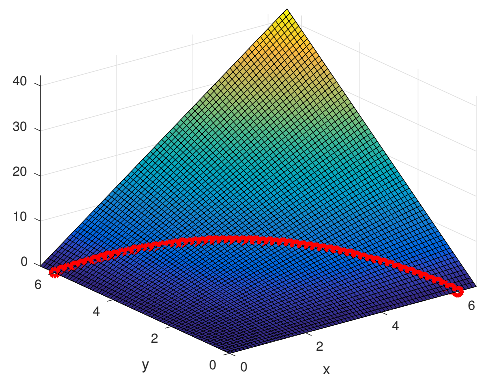
.



Lösung 2:

(a)

$$\begin{aligned}
&\Lambda(x, y, \lambda) = x\,y + \lambda\,(x + y - 6)\\
\Rightarrow\quad &\nabla\Lambda(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} y + \lambda \\ x + \lambda \\ x + y - 6 \end{pmatrix} = \vec{0}\\
\Leftrightarrow\quad &y = -\lambda \ \wedge \ x = -\lambda\\
\Rightarrow\quad &\lambda = -3
\end{aligned}$$



Extremum bei

$$K = (3, 3)\,.$$

(b)

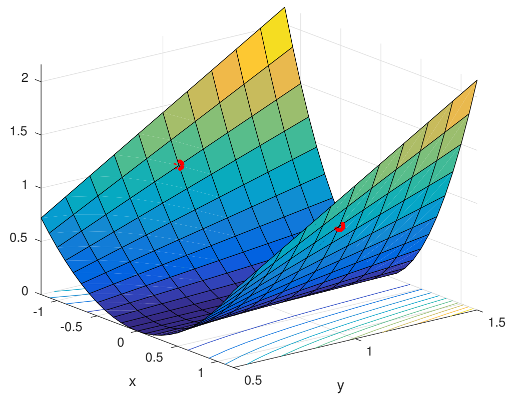
$$\lambda(x, y, \lambda) = x^2\, y + \lambda\,(2\,x^2 + y^2 - 3)$$

$$\nabla\lambda(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 2\,x\,y + 4\,x\,\lambda \\ x^2 + 2\,y\,\lambda \\ 2\,x^2 + y^2 - 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\overset{\text{1. Zeile}}{\Rightarrow} \qquad y = -2\,\lambda$$

$$\overset{\text{2. Zeile}}{\Rightarrow} \qquad x = \pm 2\,\lambda$$

$$\overset{\text{3. Zeile}}{\Rightarrow} \qquad \lambda = \pm\frac{1}{2}$$



Damit sind die vier Punkte

$$(\pm 1, \pm 1)$$

Kandidaten für Extrema. Bei der Auswertung sehen wir, dass $f(\pm 1, 1) = 1$ und $f(\pm 1, -1) = -1$ ist und demnach bleiben zwei Lösungen, nämlich

$$K_{1,\max} = (-1, 1) \quad \text{und} \quad K_{2,\max} = (1, 1)\,.$$

Lösung 3:

(a) (i)

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\|x\|_2 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,x_1}{2\,\left(x_1^2 + x_2^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_1}{\|x\|_2}$$

(ii)

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|_2 = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{2\,x_i}{2\,\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x_i}{\|x\|_2}$$

(iii)

$$\nabla\|x\|_2 = \frac{x}{\|x\|_2}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{\|x\|_2} &= \frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|_2^{-1} \\
&= -\|x\|_2^{-2}\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|_2 \\
&= -\|x\|_2^{-2}\frac{x_i}{\|x\|_2} \\
&= -\frac{x_i}{\|x\|_2^3}
\end{aligned}$$

Dann gilt für den Gradienten

$$\nabla\frac{1}{\|x\|_2} = -\frac{x}{\|x\|_2^3}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\|v\|_2 &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^n v_k^2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n v_k^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{k=1}^n v_k^2(x) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^n v_k^2(x)\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{k=1}^n 2\,v_k(x)\,v_{k,x_i}(x) \\
&= \frac{1}{\|v\|_2}\sum_{k=1}^n v_k(x)\,v_{k,x_i}(x) \\
&= \frac{(v^T\,Dv)_i}{\|v\|_2}
\end{aligned}$$

Dann gilt für den Gradienten

$$\nabla\|v\|_2 = v^T\,Dv\,\frac{1}{\|v\|_2}$$

(d) Königsetappe :)

Die Ableitung von $u(x)$ - also an der Stelle x - in Richtung x ist ja

$$u_x = \nabla u\cdot x\,,$$

oder? Wenn ich jetzt nach der zweiten Ableitung in Richtung x suche, dann mache ich das gleiche mit u_x statt u, also

$$u_{xx} = \nabla u_x\cdot x = \begin{pmatrix}(u_x)_{x_1}\\ \vdots\\ (u_x)_{x_n}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = (u_x)_{x_1}\,x_1+\cdots+(u_x)_{x_n}\,x_n\,.$$

Betrachten wir mal einen Summanden für sich, den i-ten:

$$\begin{aligned}(u_x)_{x_i}\,x_i &= (\nabla u \cdot x)_{x_i}\;x_i\\ &= (u_{x_1}\,x_1 + \cdots + u_{x_n}\,x_n)_{x_i}\;x_i\\ &= ((u_{x_1}\,x_1)_{x_i} + \cdots + (u_{x_n}\,x_n)_{x_i})\;x_i\end{aligned}$$

Achtung Produktregel

$$\begin{aligned}&= (u_{x_1 x_i}\,x_1 + u_{x_1}\,\delta_{1i} + \cdots + u_{x_n x_i}\,x_n + u_{x_n}\,\delta_{ni})\;x_i\\ &= u_{x_1 x_i}\,x_1\,x_i + \cdots + u_{x_n x_i}\,x_n\,x_i + u_{x_i}\,x_i\\ &= (x^T\,Hu)_i\,x_i + u_{x_i}\,x_i\end{aligned}$$

Damit gilt insgesamt

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \sum_{i=1}^{n}(u_x)_{x_i}\,x_i = \sum_{i=1}^{n}(x^T\,Hu)_i\,x_i + u_{x_i}\,x_i\\ &= x^T\,Hu \cdot x + \nabla u \cdot x = < Hu\,x + \nabla u, x >\end{aligned}$$