Blatt 9: Optimierung mit und ohne Nebenbedingung MAE 3

Aufgabe 1:

Ermitteln Sie lokale Extrema von

(a)

$$f(x,y) = (y - x^2)(y - 2\,x^2) \quad \text{auf} \quad [-1,1]^2\,.$$

(b)

$$f(x,y) = 3\,x\,y - x^3 - y^3 \quad \text{auf} \quad \mathbb{R}^2\,.$$

Aufgabe 2:

Ermitteln Sie lokale Extrema von

(a)

$$f(x,y) = x\,y \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad x + y = 6\,.$$

(b)

$$f(x,y) = x^2\,y \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad 2\,x^2 + y^2 = 3\,.$$

Aufgabe 3:

Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

die Euklidische Norm zum Standardskalarprodukt. Weiter sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine skalar- und $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion.

(a) (i) Berechnen Sie die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\|x\|_2$$

für $n = 2$.

(ii) Berechnen Sie die partielle Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\|x\|_2$$

für beliebige n.

(iii) Berechnen Sie den Gradienten

$$\nabla \|x\|_2$$

für beliebige n.

(b) Berechnen Sie

$$\nabla \frac{1}{\|x\|_2}$$

. Gehen Sie dabei schrittweise vor wie in Teil (a).

(c) Berechnen Sie

$$\nabla \|v\|_2$$

(d) Berechnen Sie

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial x} u = u_{xx}$$

also $u(x_1, x_2)$ zwei Mal in Richtung $x = (x_1, \ldots, x_n)$ abgeleitet. **Tipp:** Reduzieren Sie die Situation gerne erst auf den Fall $n = 2$. Das hilft.