Blatt 8: Definitheit und kritische Punkte — MAE 3

Aufgabe 1:

Berechnen Sie die Hessematrix der Funktion $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + \mathrm{e}^{x_2} + x_1 \sin(x_3)$.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie die Definitheit der folgenden quadratischen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Versuchen Sie es mit beiden Verfahren, Eigenwerte und Kriterium von Sylvester.

Aufgabe 3:

(a) Ermitteln Sie Sattelpunkte und Extremstellen der Funktion $f(x, y) = 4\,x\,y + 6\,x + 2\,y + 3$.

(b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x, y, z) = x^2 + 2\,y^2 + z^2 - x\,y^2 + 12\,x + 2\,z$ auf Extremwerte.

Aufgabe 4:

Berechnen Sie Kandidaten für Extremstellen von

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4\,x_1^2 - x_2^2 + x_3^3 - x_2\,x_3$$

auf $D = [0, 1]^3$.

Lösung 1:

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos x_3 \\ 0 & e^{x_2} & 0 \\ \cos x_3 & 0 & -x_1 \sin x_3 \end{pmatrix}$$

Lösung 2:

A ist indefinit, B ist positiv definit und C ist negativ definit.

Lösung 3:

(a)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 4y+6 \\ 4x+2 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

Die Hessematrix

$$Hf = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = \pm 4$ ist indefinit und damit ist der einzige stationäre Punkt ein Sattelpunkt, keine Extremalstelle.

(b)

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x - y^2 + 12 \\ 4y - 2xy \\ 2z+2 \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{array}{ccccc} z = -1 & \wedge & (y = 0 & \wedge & x = -6) \\ & \vee & (y = \pm 4 & \wedge & x = 2) \end{array}$$

Das liefert die Kandidaten

$$K_1 = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \; K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \; K_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Die Hessematrix von f

$$Hf(x) = \begin{pmatrix} 2 & -2x_2 & 0 \\ -2x_2 & 4 - 2x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ausgewertet bei den K_i sehen so aus:

$$Hf_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{pos. def.}}, \; Hf_2 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -8 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{indefinit}}, \; Hf_3 = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2x_2 & 0 \\ -2x_2 & 4 - 2x_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{\text{indefinit}}$$

f hat bei $(-6, 0, \cdot)$ ein lokales Minimum, also eine Gerade, die eine Rinne bildet.

Lösung 4:

In $\mathring{D}$: $\nabla f = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Also ist $K_0 = (0, 0, 0)$.

Der Rand von D setzt sich zusammen aus 6 Seitenflächen S_i. Zusätzlich können die Eckpunkte des Gebiets Extremalstellen sein.

8 Gebietsecken (eine haben wir schon!):

$$\begin{array}{llll} K_1 = (1,0,0) & K_2 = (1,1,0) & K_3 = (0,1,0) & K_4 = (0,0,1) \\ K_5 = (1,0,1) & K_6 = (1,1,1) & K_7 = (0,1,1) & \end{array}$$

stationäre Punkte auf den 6 Seitenflächen:

$S_1 = [0,1] \times [0.1] \times \{0\}$	$x_3 = 0$	nichts Neues
$S_1 = [0,1] \times [0.1] \times \{1\}$	$x_3 = 1$	$K = \left(0, \frac{-1}{2}, 1\right) \notin D$
$S_1 = [0,1] \times \{0\} \times [0.1]$	$x_2 = 0$	nichts Neues
$S_1 = [0,1] \times \{1\} \times [0.1]$	$x_2 = 1$	$K_8 = \left(0, 1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$
$S_1 = \{0\} \times [0.1] \times [0.1]$	$x_1 = 0$	nichts Neues
$S_1 = \{1\} \times [0.1] \times [0.1]$	$x_1 = 1$	nichts Neues