Blatt7: Richtungsableitung & partielle Ableitung — MAE 3

Aufgabe 1:

Es seien die Abbildungen

- $u(x) = x_1 \cdot x_2$
- $v(x) = x_1 + \sin(3\,x_2)$
- $w(x) = \mathrm{e}^{x_1} + x_2\,x_3^2$

gegeben.

(a) Berechnen Sie jeweils den Gradienten der angegebenen Funktionen.

(b) Berechnen Sie jeweils die Richtungsableitung in Richtung $a = \binom{3}{1}$ und $b = \binom{-1}{2}$ im Punkt $(1, 2)$, resp. $a = (3, 1, 0)^T$ und $b = (-1, 2, 0)^T$ im Punkt $(1, 2, 0)$.

Aufgabe 2:

Eine unbekannte Funktion habe an einem ebenso unbekannten Punkt in Richtung des Vektors $v = \binom{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}$ die Richtungsableitung $u_v = 5$ und in Richtung $w = \binom{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}$ die Richtungsableitung $u_w = 2$. Wie lauten die partiellen Ableitungen der Funktion in diesem Punkt?

Aufgabe 3:

Es seien die Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben mit

$$g(t) = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$
$$f(x) = \ln(|x| - 1)$$

(a) Wie lauten die Definitionsbereiche $\mathbb{D}_g$ und $\mathbb{D}_f$?

(b) Wie lautet die Verkettung $(f \circ g)$?

(c) Wie lautet der Definitionsbereich $\mathbb{D}_{f \circ g}$?

(d) Fertigen Sie eine Skizze der Funktionsverkettung und den entsprechenden Definitionsbereichen an.

(e) Berechnen Sie die Ableitung von g.

(f) Berechnen Sie den Gradienten von f.

(g) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitung von $(f \circ g)$.

Lösung 1:

- $u(x) = x_1 \cdot x_2$

(a)

$$\nabla u = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(b)

$$u_a(x) = \nabla u(x) \cdot \tilde{a} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} = (x_1 + 3\,x_2)\,\frac{1}{\sqrt{10}} \quad u_a(1,2) = \frac{7}{\sqrt{10}}$$
$$u_b(x) = \nabla u(x) \cdot \tilde{b} = \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = (2\,x_1 - x_2)\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad u_b(1,2) = 0$$

- $v(x) = x_1 + \sin(3\,x_2)$

(a)

$$\nabla v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\,\cos(3\,x_2) \end{pmatrix}$$

(b)

$$v_a(x) = \nabla v(x) \cdot \tilde{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\,\cos(3\,x_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} = (3 + 3\,\cos(3\,x_2))\frac{1}{\sqrt{10}}$$
$$v_a(1,2) = \frac{3 + 3\,\cos 6}{\sqrt{10}}$$
$$v_b(x) = \nabla v(x) \cdot \tilde{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\,\cos(3\,x_2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = (-1 + 6\,\cos(3\,x_2))\frac{1}{\sqrt{5}}$$
$$v_b(1,2) = \frac{-1 + 6\,\cos 6}{\sqrt{5}}$$

- $w(x) = \mathrm{e}^{x_1} + x_2\,x_3^2$

(a)

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{x_1} \\ x_3^2 \\ 2\,x_2 x_3 \end{pmatrix}$$

(b)

$$w_a(x) = \nabla w(x) \cdot \tilde{a} = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ x_3^2 \\ 2\,x_2 x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{3\,e^{x_1} + x_3^2}{\sqrt{10}}$$

$$w_a(1,2,0) = \frac{3\,e}{\sqrt{10}}$$

$$w_b(x) = \nabla w(x) \cdot \tilde{b} = \begin{pmatrix} e^{x_1} \\ x_3^2 \\ 2\,x_2 x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-e^{x_1} + 2\,x_3^2}{\sqrt{5}}$$

$$w_b(-1,2,0) = \frac{-e^{-1}}{\sqrt{5}}$$

Lösung 2:

Es gilt

$$\nabla u \cdot v = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 5\,,$$

$$\nabla u \cdot w = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix} = 2\,.$$

Das sind zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Das führt auf die partiellen Ableitungen

$$u_x = \frac{35}{6} \quad \text{und} \quad u_y = \frac{15}{8}$$

und entsprechend den Gradienten

$$\nabla u = \frac{5}{2} \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Lösung 3:

(a)

$$\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus B_1(0)$$

Dabei beschreibt $B_1(0)$ den Einheitskreis mit Rand, also

$$B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}\,.$$

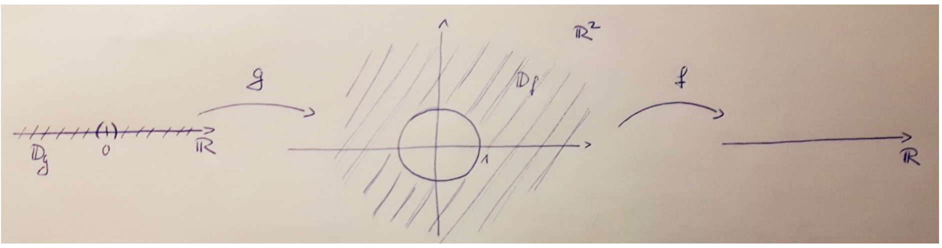
(b)

$$(f \circ g)(t) = \ln(|g| - 1) = \ln\left(\frac{1}{|t|} - 1\right)$$

(c)

$$\mathbb{D}_{f \circ g} = (-1, 1) \setminus \{0\}$$

(d) Skizze:



(e)

$$g'(t) = \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix} -\cos t - t\,\sin t \\ \sin t + t\,\cos t \end{pmatrix} = \frac{-1}{t}\,g + g^{\perp}$$

(f)

$$\nabla f = \frac{x}{x^2 - |x|}$$

(g) Mit

$$\nabla f(g) = \frac{g}{g^2 - |g|}$$

folgt

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(t) = \nabla f(g) \cdot g' &= \frac{g}{g^2 - |g|}\left(\frac{-1}{t}\,g + g^{\perp}\right) \\ &= \frac{-1}{t}\,\frac{g^2}{g^2 - |g|} = \frac{-1}{t}\,\frac{\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t^2} - \frac{1}{|t|}} = \frac{-1}{t}\,\frac{1}{1 - |t|} = \frac{1}{t\,(|t| - 1)} \end{aligned}$$