School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

Blatt 6: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie MAE 3

Aufgabe 1:

Ein homogener Würfel wird zwei Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens einmal die Augenzahl Sechs zu erzielen?

	$\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,1),\ldots\}$
A: Augenzahl 6 beim ersten Wurf	$A =$
B: Augenzahl 6 beim zweiten Wurf	$B =$
$P(A) =$	$P(B) =$
$A \cup B$	
$P(A \cup B) =$	
$A \cap B$	
$P(A \cap B) =$	

Aufgabe 2: **Paradoxon von Chevalier de Méré:**

Im 17. Jhd wurden die folgenden zwei Glücksspiele gespielt:

- Bei 4 Würfen mit 1 Würfel soll mindestens einmal eine Sechs gewürfelt werden.
- Bei 24 Würfen mit 2 Würfeln soll mindestens einmal eine Doppelsechs gewürfelt werden.

Das Paradoxon besteht darin, dass die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Wurf beim zweiten Experiment um den Faktor 6 kleiner ist als die Erfolgswahrscheinlichkeit pro Wurf beim ersten Experiment, die Anzahl der Würfe hingegen 6mal so groß. Bei oberflächlicher Betrachtung könnte man daher annehmen, dass sich dies kompensiert und die Erfolgswahrscheinlichkeiten bei den beiden Experimenten gleich sind. Die Erfahrung zeigte jedoch, dass die Gewinnchancen beim ersten Spiel etwas höher waren als beim zweiten.

Chevalier de Méré rechnete foldendermaßen:

P(Sechs bei 4 Würfen mit einem Würfel)=$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

P(Doppelsechs bei 24 Würfen mit zwei Würfeln)=$24\,\frac{1}{36} = \frac{2}{3}$

Wo liegt der Fehler?

Aufgabe 3:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Klasse mit k Studenten, wenigstens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag haben?

Ist das eine Laplace-Wahrscheinlichkeit oder nicht?

Aufgabe 4:

Sie werfen eine Münze mit Kopf und Zahl drei Mal.

- Wie lautet der Wahrscheinlichkeitsraum Ω?
- Wir groß ist $P(\{\omega\})$, wenn ω ein Ergebnis aus Ω ist?
- Bestimmen Sie die Elemente folgender Ereignisse:

  A: Sie erhalten mindestens zwei mal Kopf.

  B: Der erste Wurf ist Kopf.

  C: Zweiter und dritter Wurf sind beide Male Kopf oder beide Male Zahl.
- Sind A, B und C abhängig oder unabhängig?

Aufgabe 5:

Ein Skat-Kartenspiel enthält 32 Karten mit vier Farben zu je acht Werten. Die Karten werden gemischt.

(a) Nacheinander werden drei Karten gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Die drei gezogenen Karten sind von gleicher Farbe.

B: Die drei gezogenen Karten haben den gleichen Wert.

(b) Das Kartenspiel wird zu einem Glücksspiel genutzt. Hierbei muss der Spieler nur eine Karte ziehen. Der Spieler setzt vor dem Ziehen einer Karte als Einsatz 1 CHF. Zieht der Spieler einen König gewinnt er 4 CHF. Zieht er ein Herz-Ass gewinnt er 8 CHF. Bei allen anderen Spielausgängen bekommt er nichts.

Ist das Spiel fair?

Wie muss man den Gewinn bei der Ziehung des Herz-Ass ändern, damit das Spiel fair ist?

Aufgabe 6:

Viele Schwangerschaftstest versprechen absolute Sicherheit. In der Realität sieht das allerdings so aus: Wenn die Frau, die testet schwanger ist so zeigt der Test zu 95 % ein positives Ergebnis. Ist die Frau nicht schwanger so ist der Test in 98% der Fälle auch negativ. 30% der Frauen, die den Test machen sind tatsächlich schwanger.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Frau schwanger, wenn der Test ein positives Ergebnis zeigt?

Lösung 1:

Wahrscheinlichkeitsraum

$$\Omega = \{(1,1)\,,\ (1,2)\,,\ (1,3)\,,\ \cdots\,,\ (6,4)\,,\ (6,5)\,,\ (6,6)\}$$

Anzahl möglicher Ergebnisse: ($n = 6$, $k = 2$, mit Wdh, mit Rf)

$$m = n^k = 6^2 = 36$$

A: Augenzahl 6 beim ersten Wurf

$$A = \{(6,1)\,,\ (6,2)\,,\ (6,3)\,,\ (6,4)\,,\ (6,5)\,,\ (6,6)\} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

B: Augenzahl 6 beim zweiten Wurf

$$B = \{(1,6)\,,\ (2,6)\,,\ (3,6)\,,\ (4,6)\,,\ (5,6)\,,\ (6,6)\} \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$A \cup B$: Augenzahl 6 beim zweiten Wurf

$$B = \{(6,1)\,,\ (6,2)\,,\ (6,3)\,,\ (6,4)\,,\ (6,5)\,,\ (1,6)\,,\ (2,6)\,,\ (3,6)\,,\ (4,6)\,,\ (5,6)\,,\ (6,6)\}$$

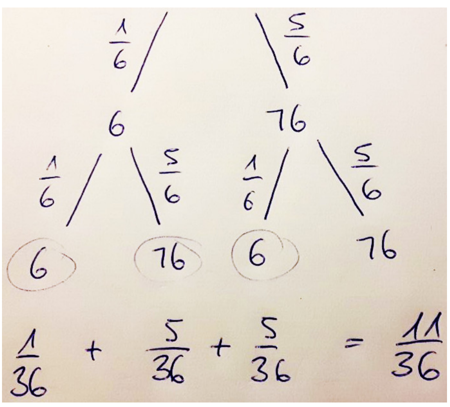
$$\Rightarrow \quad P(A \cup B) = \frac{11}{36}$$

$$A \cap B = \{(6,6)\} \quad \Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Oder so: Da $A \cap B \neq \emptyset$ sind die Ereignisse vereinbar. Damit gilt das Additionsgesetz

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

Einfacher liest man die Ergebnisse am Baumdiagramm ab. :)



Lösung 2:

- A: Bei 4 Würfen mit 1 Würfel wird mindestens einmal eine Sechs gewürfelt.

  Dann ist das Gegenargument: $\overline{A}$: Bei 4 Würfen wird nicht eine Sechs geworfen. Das passiert in jedem Wurf mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{5}{6}$ also insgesamt

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - P(\overline{A}) = \frac{6^4 - 5^4}{6^4} \approx 51,76\,\%$$

- A: Bei 24 Würfen mit 2 Würfeln soll mindestens einmal eine Doppelsechs gewürfelt werden.

  Dann ist das Gegenargument: $\overline{A}$: Bei 24 Würfen mit 2 Würfeln wird nie eine Doppelsechs geworfen.

  Bei einem Wurf mit zwei Würfeln gibt es 36 verschiedene Ergebnisse. Also gilt erhält man zu $\frac{1}{36}$-stel eine Doppelsechs und zu $\frac{35}{36}$-stel keine Doppelsechs. Insgesamt gilt dann

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 49,14\,\%$$

Korrektur von Chevalier de Mérés Rechnung:

Hier scheint ein Baumdiagramm gezeichnet worden, dass alle 4 Würfe in eine Stufe setzt.

Lösung 3:

A: In einer Klasse mit k Studenten haben wenigstens zwei Studenten am gleichen Tag Geburtstag. Wir betrachten der Einhachheithalber das Gegenereignis $\overline{A}$: In einer Klasse mit k Studenten hat keiner mit einem anderen am gleichen Tag Geburtstag.

$$P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

Sagen wir es gibt $n = 365$ Tage im Jahr. Bei der Frage nach dem gleichen Geburtstag spielt die Jahreszahl keine Rolle. Nehmen wir einen Studenten und die Aussage

A_1: Student 1 hat mit keinem anderen am gleichen Tag Geburtstag. Da es keinen anderen Studenten gibt ist die Anzahl der günstigen Fälle gleich der Anzahl der möglichen Fälle, denn er darf ja an jedem der 365 Tage Geburtstag haben. Wir erhalten damit die Wahrscheinlichkeit

$$P(A_1) = \frac{365}{365} = \frac{n}{n}\,.$$

A_2: Student 2 hat mit keinem anderen am gleichen Tag Geburtstag. Die Anzahl der Möglichkeiten verändert sich nicht. Das Jahr hat immer noch 365 Tage, aber nun gibt es nur noch 364 günstige Fälle, also gilt

$$P(A_2) = \frac{364}{365} = \frac{n-1}{n}\,.$$

Das führen wir sukzessive fort und erhalten für das Ereignis A_i: Student i hat mit keinem anderen am gleichen Tag Geburtstag. Die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses ergibt sich kombinatorisch als

$$P(A_i) = \frac{364 - (i-1)}{365} = \frac{n-i+1}{n}\,.$$

Das Ereignis $\overline{A}$ ist eine aussagelogische UND- bzw. eine mengentheoretische $\cap$-Verknüpfung der Ereignisse A_i, $i = 1, \ldots, k$, also gilt

$$\begin{aligned}
P(A) &= 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) = 1 - \prod_{i=1}^{k} P(A_i) \\
&= 1 - \prod_{i=1}^{k} \frac{n-i+1}{n} \qquad (1) \\
&= 1 - \frac{n}{n} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \\
&= 1 - \frac{n \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdots 1} \\
&= 1 - \frac{n!}{n^k\,(n-k)!}
\end{aligned}$$

Insgesamt gilt also: Die Wahrscheinlichkeit, dass von k Studenten mindestens zwei an einem Tag Geburtstag haben beträgt

$$\boxed{P(A) = 1 - \frac{365!}{365^k\,(365-k)!}}$$

Versuchen Sie mal Ihren Taschenrechner mit $k = 2$ zu tracktieren. Möglicherweise hat dieser Schwierigkeiten damit, weil $365!$ eine ziemlich große Zahl ist. Am besten berechnen Sie das Ergebnis über ein Produkt wie in Zeile (1), dann multiplizieren Sie jeweils kleine Zahlen auf. Etwa so (Matlab):

```
prodd = 1;
K = 2;
N = 365;

for k=1:K
   prodd = prodd * (N-k)/N;
end

fprintf('Die Wahrscheinlichkeit, dass unter k=%d Studenten welche am...
   gleichen Tag Geburtstag haben ist P=%f (Prozent)\n',K,100*(1-prodd));
```

Jedes $P(A_i)$ für sich beschreibt eine Laplace-Wk. Insgesamt aber nicht, da die einzelnen Ereignisse nicht gleichermaßen eintreten.

Lösung 4: Münzexperiment

- $$\Omega = \{(kkk), (zkk), (kzk), (kkz), (zzk), (zkz), (kzz), (zzz)\}$$
- $$P(\{\omega\}) = \frac{1}{8}\,,\ \forall\,\omega \in \Omega$$
- A: Sie erhalten mindestens zwei mal Kopf.
  $$A = \{(zkk), (kzk), (kkz), (kkk)\}$$
  B: Der erste Wurf ist Kopf.
  $$B = \{(kkk), (kzk), (kkz), (kzz)\}$$
  C: Zweiter und dritter Wurf sind beide Male Kopf oder beide Male Zahl.
  $$C = \{(kkk), (zkk), (kzz), (zzz)\}$$
- Sind A, B und C abhängig oder unabhängig?
  $$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \qquad \text{aber} \qquad P(A)\cdot P(B) = \frac{1}{4}$$
  A und B sind abhängig.
  $$P(A \cap C) = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad P(A)\cdot P(C) = \frac{1}{4}$$
  A und C sind unabhängig.
  $$P(B \cap C) = \frac{1}{4} \qquad \text{und} \qquad P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{4}$$
  B und C sind unabhängig.
  $$\begin{aligned} A \cap B \cap C &= \{(kkk)\} \\ P(A \cap B \cap C) &= \frac{1}{8} \\ P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$
  Damit folgt, dass A, B und C unabhängig sind.

Lösung 5:

Ein Skat-Kartenspiel enthält 32 Karten mit vier Farben zu je acht Werten. Die Karten werden gemischt.

(a) A: Die drei gezogenen Karten sind von gleicher Farbe.

Bei der ersten Karte ist es noch egal. Sie hat mit sich selbst sicher die gleiche Farbe.

$$P(A) = 1 \cdot \frac{7}{31} \cdot \frac{6}{30} = \frac{7}{155}$$

B: Die drei gezogenen Karten haben den gleichen Wert.

$$P(B) = 1 \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{2}{30} = \frac{1}{155}$$

(b) Das Kartenspiel wird zu einem Glücksspiel genutzt. Hierbei muss der Spieler nur eine Karte ziehen. Der Spieler setzt vor dem Ziehen einer Karte als Einsatz 1 CHF. Zieht der Spieler einen König gewinnt er 4 CHF. Zieht er ein Herz-Ass gewinnt er 8 CHF. Bei allen anderen Spielausgängen bekommt er nichts.

$$\underbrace{\frac{4}{32}}_{\text{Wk einen König zu ziehen}} 4 + \underbrace{\frac{1}{32}}_{\text{Wk ein Herz-Ass zu ziehen}} 8 - \underbrace{1}_{\text{Spieleinsatz}} = \underbrace{-\frac{1}{4}}_{\text{Durchschnittlicher Spielausgang für den Spieler}}$$

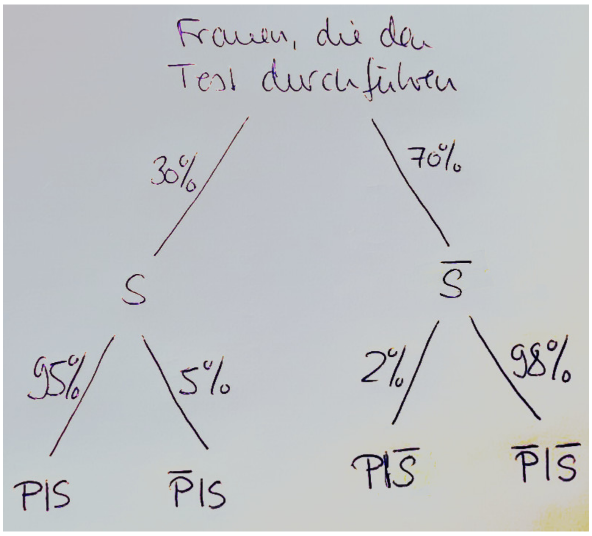
Das Spiel ist nicht fair.

Gewinn x bei der Ziehung des Herz-Ass für ein faires Spiel:

$$\begin{aligned} & \frac{4}{32} \cdot 4 + \frac{1}{32} \cdot x = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 16 \end{aligned}$$

Lösung 6:

Ein Baumdiagramm zeigt für die Ereignisse S: die Frau ist schwanger und P: der Test ist positiv folgende Situation:



Die Wk, dass ein Test ein positives Ergebnis zeigt beträgt

$$P(P) = P(P|S) \cdot P(S) + P(P|\overline{S}) \cdot P(\overline{S}) = 30\% \cdot 95\% + 70\% \cdot 2\% = 29.9\%$$

Dmit ergibt sich die Wk, dass die testende Frau tatsächlich schwanger ist zu

$$P(S|P) = \frac{P(P|S) \cdot P(S)}{P(P)} = \frac{95\% \cdot 30\%}{29.9\%} \approx 95.32\% \,.$$