

Blatt 5: Kombinatorik

MAE 3

Urnenmodelle

Geben Sie zu jeder der beschriebenen Situationen an, wie viele Elemente (k) ausgewählt werden sollen, aus wie vielen Elementen (n) ausgewählt werden kann, ob bei der Auswahl Wiederholungen (W) möglich sind und ob die Reihenfolge (R) wesentlich ist. Entscheiden Sie, ob es sich um eine Permutation (P), Kombination (K) oder Variation (V) handelt. Es geben Sie dann die passende Formel an.

1. Beim Bankomat steht zum Eingeben des Pins ein Nummernblock mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 zur Verfügung. Wie viele verschiedene Pins aus 4 Zahlen lassen sich daraus machen?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

Formel: _____

2. Ein Pizza-Service macht den Kunden das Angebot aus 6 verschiedenen Belägen 4 auszuwählen, wobei sowohl 4 Portionen vom gleichen Belag gewählt werden dürfen als auch jede andere mögliche Kombination von Belägen. Wie viele verschiedene Pizzas können bestellt werden?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

Formel: _____

3. Bei einem Pferderennen sind 10 Pferde am Start. Wie viele Möglichkeiten gibt es auf die drei Erstplatzierten unter Angabe der Reihenfolge zu wetten? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit per Zufall richtig zu wetten?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

Formel: _____

4. Beim Zahlenlotto gilt es 6 aus 45 auszuwählen. Wie viele Lottotipps gibt es?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

Formel: _____

5. Wie viele mögliche Natel-Telefonnummern gibt es in der Schweiz? Wir nehmen an, dass alle obligatorisch mit "07" beginnen, dann folgt eine der Ziffern (6-9), dann eine der Ziffern (1-9). Die restlichen 6 Ziffern sind beliebig aus (0-9).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

Formel: _____

6. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben SPASS anzuordnen?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

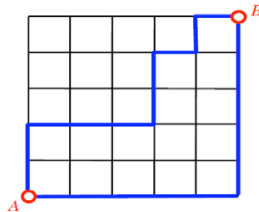
Formel: _____

7. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Buchstaben HANS anzuordnen?

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

Formel: _____

8. Ein Lager ist in 25 gleiche Quadrate unterteilt (siehe Skizze). Die Stapelfahrer können zwischen allen Quadraten fahren. Wie viele Wege gibt es um von A nach B zu kommen, wenn man nicht mehr als den mindestens benötigten Weg zurücklegen will (zwei mögliche kürzeste Wege sind markiert).



| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| k | n | W | R | P | K | V |
| | | | | | | |

Formel: _____

Aufgabe 1: _____

Berechnen Sie wieviele Möglichkeiten der Anordnung es für

- (a) 4 unterschiedlich farbige Kugeln gibt.
- (b) m schwarze und 1 weiße Kugel gibt.

Aufgabe 2: _____

In einem Zimmer gibt es 5 Lampen, die unabhängig voneinander aus- und eingeschaltet werden können. Wie viele Arten von Beleuchtungen gibt es insgesamt?

Aufgabe 3: _____

Ein Zug besteht aus 4 Wagen der 1. Klasse, 7 Wagen der 2. Klasse, 1 Speisewagen und 2 Gepäckwagen. Wieviele unterschiedliche Wagenfolgen sind möglich,

- (a) wenn die Wagen beliebig eingereiht werden dürfen?
- (b) wenn die Wagen der ersten Klasse nicht getrennt werden dürfen?

Aufgabe 4: _____

Der Geheimagent Fred Clever vertauscht immer zwei Buchstaben, um einen Code, bestehend aus 29 Buchstaben zu knacken.

- (a) Wiviele mögliche Kombinationen gibt es?
- (b) Wie lange bräuchte man, um alle Kombinationen auszuprobieren, falls man jede Sekunde 1 Million Möglichkeit testen könnte?

Aufgabe 5: _____

Aus einer Schulklasse von 23 Schülern soll eine Abordnung von 5 Schülern zum Direktor geschickt werden. Auf wieviele Arten kann diese Abordnung gebildet werden?

Aufgabe 6: _____

Auf wieviele Arten kann man 7 Hotelgäste in 10 freie Einzelzimmer unterbringen?

Aufgabe 7: _____

Für das Elfmeterschießen muss der Trainer 5 der 11 Spieler auf dem Platz benennen. Wieviele Möglichkeiten hat er bei

- (a) der Bestimmung der Kandidaten?
- (b) der Bestimmung der Reihenfolge der Schützen, nachdem die Kandidaten gewählt wurden?

Aufgabe 8: _____

Bei der Fußball-WM 1998 nahmen 32 Nationen teil. Wieviele Möglichkeiten gab es

- (a) für die Teilnehmer des Halbfinals (= Runde der letzten 4)?
- (b) für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?

Aufgabe 9: _____

Ein Autokennzeichen werde gebildet aus mindestens einem, maximal zwei Buchstaben des Alphabets, von dem es insgesamt 26 Buschstaben gibt und einer Zahl, bestehend aus mindestens 2, maximal drei Ziffern ohne die Null an erster Stelle.

Wieviele Möglichkeiten gibt es, wenn

- (a) ein Buchstabe auch mehrmals erscheinen darf?
- (b) ein Buchstabe maximal einmal erscheinen darf?

Aufgabe 10: _____

- (a) 20 Personen verabschieden sich voneinander per Händedruck. Jeder geht alleine nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?

- (b) 15 Ehepaare verabschieden sich voneinander mit Händedruck und gehen paarweise nach Hause. Wie oft werden dabei die Hände gedrückt?
- (c) Die 15 Ehepaare verabschieden sich folgendermaßen: Die Herren von den Herren mit Händerdruck, die Damen von den Damen mit Küsschen auf beide Wangen, die Damen von den Herren mit Händedruck und Küsschen auf die rechte Wange. Die Ehepaare gehen wieder paarweise nach Hause. Wie viele Küsschen werden gegeben? Wie oft werden die Hände gedrückt?

Lösung 1: _____

(a) (Permutation ohne Wiederholung)

$$P_n = n! = 4! = 24$$

(b) (Permutation mit Wiederholung)

$$P_n^{(k)} = \frac{n!}{k!} = \frac{(m+1)!}{m!} = m+1$$

Lösung 2: _____

(Variation mit Wiederholung)

$$n^k = 2^5 = 32$$

Lösung 3: _____

(a) (Permutation mit Wiederholungen)

$$P_n^{(k_1, k_2, k_3, k_4)} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! k_4!} = \frac{14!}{4! 7! 1! 2!} = 360'360$$

(b) Wir betrachten die 4 Wagen der 1. Klasse als ein Element:

$$P_n^{(k_1, k_2, k_3, k_4)} = \frac{n!}{k_1! k_2! k_3! k_4!} = \frac{11!}{1! 7! 1! 2!} = 3'960$$

Lösung 4: _____

(a) (Anordnung)

$$P_n = n! = 29! = 8.84 \cdot 10^{39}$$

(b)

$$8.84 \cdot 10^{39} \cdot 10^{-6} = 8.84 \cdot 10^{24} = 2.456 \cdot 10^{21} \text{ Stunden} = 1.02315 \cdot 10^{20} \text{ Tage} = 2.8 \cdot 10^{17} \text{ Jahre}$$

Lösung 5: _____

(Kombination) Auswahl ohne Reihenfolge und ohne Wiederholung:

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k} = \binom{23}{5}$$

Lösung 6: _____

(Variation) Auswahl mit Reihenfolge ohne Wiederholung:

$$V_n^{(k)} = k! \binom{n}{k} = 7! \binom{10}{7}$$

Lösung 7: _____

(a) (Kombination) Auswahl ohne Wiederholung:

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k} = \binom{11}{5}$$

(b) (Permutation) Anordnung ohne Wiederholung:

$$P_k = k! = 5!$$

Lösung 8: _____

(a) (Kombination) Auswahl ohne Wiederholung:

$$C_n^{(k)} = \binom{n}{k} = \binom{32}{4}$$

(b) (Variation) Auswahl ohne Wiederholung:

$$V_n^{(k)} = k! \binom{n}{k} = 4! \binom{32}{4}$$

Lösung 9: _____

(a) (Kombinationen) Auswahl ohne Wiederholung

$$\binom{27}{1} \cdot \binom{26}{1} \cdot \binom{9}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{11}{1} = 27 \cdot 26 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 694'980$$

(b) (Kombinationen) Zwei Auswahlen mit Wiederholung, drei ohne

$$\left(\binom{26}{1} \cdot \binom{25}{1} + \binom{26}{1} \right) \cdot \binom{9}{1} \cdot \binom{10}{1} \cdot \binom{11}{1} = (26 \cdot 25 + 26) \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 = 669'240$$

Lösung 10: _____

(a) "Gaußsche Summe":

$$\sum_{l=1}^{19} l = \frac{19 \cdot 20}{2} = 190$$

(b) Es gibt

$$2 \sum_{l=1}^{14} l = \frac{14 \cdot 15}{2} = 210$$

Paarverabschiedungen. Jede Paarverabschiedung bedeutet 4 Händedrücke, also insgesamt

$$420$$

(c) Es gibt nach wie vor 105 Paarverabschiedungen. Je zwei Paare verabschieden sich mit insgesamt 4 Küsschen und 3 Händedrücke, also insgesamt 420 Küsschen und 315 Händedrücke.