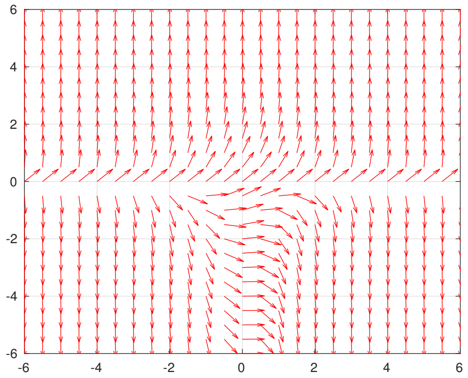
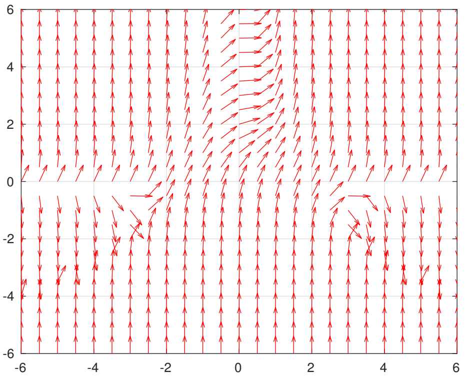
Repetition ODE MAE 3

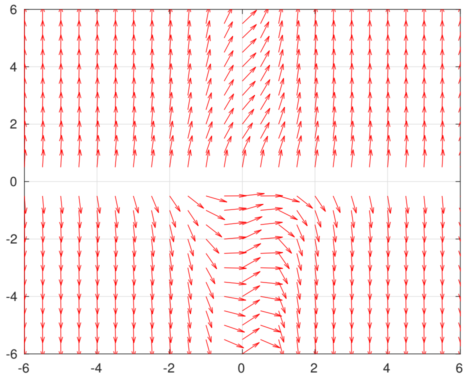
Aufgabe 1: Richtungsfelder zuordnen



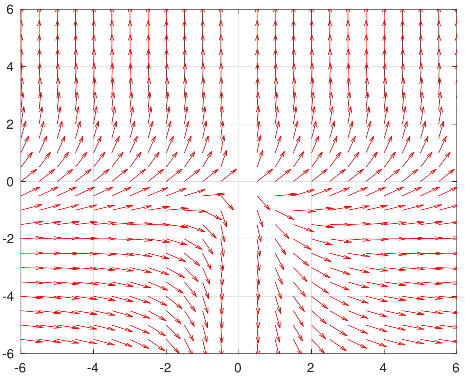
A



B



C



D

Ordnen Sie die Differentialgleichungen den oben abgebildeten Richtungsfeldern zu.

$$y' - \frac{y}{x^2} = \mathrm{e}^y \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad y' = x^2\, y + \mathrm{e}^{1-y} \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_$$

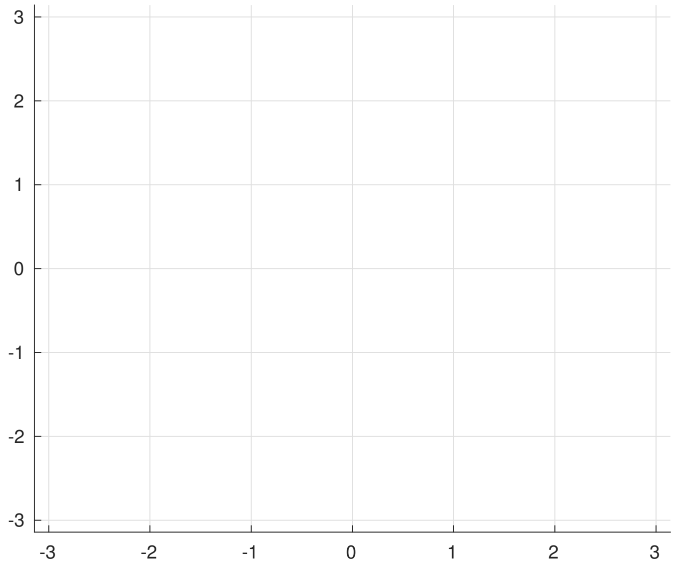
$$y' - \mathrm{e}^y - x^2\, y = 0 \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad y' = x^2\, y + \mathrm{e}^{\frac{1}{y}} \qquad \_\_\_\_\_\_\_\_$$

Aufgabe 2: Richtungsfeld erstellen

Skizzieren Sie das Richtungsfeld zur Differentialgleichung

$$y' - \sin(y) = \cos(x)$$

in nebenstehendes Achsenkreuz:



Aufgabe 3: ODE erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

(a) Lösen Sie die ODEs mit "Trennung der Variablen"

(i)

$$y' - \ln x\, y = 0$$

(ii)

$$y' = \sin y$$

Tipp: $\int \frac{1}{\sin x}\, dx = \ln \tan \frac{x}{2}$.

(iii)

$$x\, y' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tipp:
(1) Substitutieren Sie zunächst mit $w = \frac{y}{x}$.
(2) $\operatorname{asinh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

(b) Lösen Sie die inhomogenen ODEs mit

(i) partikulärer Lösung (konstante Koeffizienten)

$$y' - 42\, y = x^3 + 1$$

(ii) Variation der Konstanten (nicht konstante Koeffizienten)

$$y' - 3\, x^2\, y = \mathrm{e}^{x^3+1}$$

(c) Lösen Sie das AWP

$$\alpha\, y' + \beta\, y = g(x,y)\,, \quad y(0) = 1$$

mit α, β und $g(x,y)$ aus den vorherigen Aufgabenteilen dieser Aufgabe.

Aufgabe 4: ODE höherer Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Lösen Sie die ODE dritter Ordnung mit konstanten Koeffizienten unter Zuhilfenahme des charakteristischen Polynoms:

$$y''' - 3\,y' + 2\,y - x = 0\,,\ y(0) = 4\,,\ y'(0) = \frac{1}{2}\,,\ y(1) = \frac{7}{2}$$

Aufgabe 5: Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Gegeben sei das System gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} u' &= \alpha\, u + \beta\, v + g \\ v' &= \gamma\, u + \delta\, v + p \end{aligned} \tag{1}$$

(a) Wir betrachten zunächst den homogenen Fall

$$g = p = 0\,.$$

  (i) Stellen Sie das System von ODEs in Matrix-Vektor-Form $A\,w = w'$, $w \in \mathbb{R}^2$ dar.

  (ii) Für welche $\alpha\,,\ \beta \in \mathbb{R}$ hat A mit $\gamma = \delta = 1$ nur reelle EWe?

  (iii) Berechnen Sie die EWe und zugehörigen EVen von A mit $\alpha = -2$ und $\beta = -1$. Stellen Sie damit die Lösungen des homogenen Systems auf.

  (iv) Berechnen Sie die EWe und zugehörigen EVen von A mit $\alpha = 3$ und $\beta = -1$. Stellen Sie damit die Lösungen des homogenen Systems auf.

(b) Berechnen Sie die partikuläre Lösung von (1) mit $\gamma = \delta = 1$ und den Störfunktionen

  (i) $g(x) = 2\,x$ und $p(x) = x + 1$, α und β beliebig.

  (ii) $g(x) = x$ und $p(x) = \mathrm{e}^{2\,x}$, $\alpha = 3$ und $\beta = -1$.

(c) Geben Sie zu den Anfangswerten $u(0) = 1$ und $v(0) = -1$ jeweils die Lösungen der

  (i) homogenen Dgl mit $\alpha = -2$ und $\beta = -1$

  (ii) inhomogenen Dgl mit $\alpha = 3$ und $\beta = -1$, $g(x) = x$ und $p(x) = \mathrm{e}^{2\,x}$.

an.

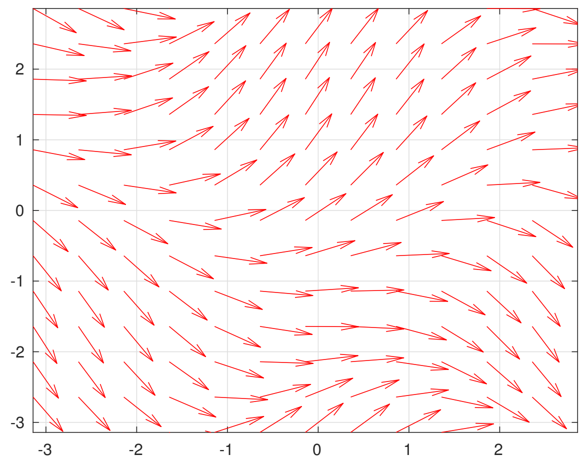
(d) Lösen Sie die ODE aus Aufgabenteil (a),(iii), indem Sie aus dem System erster Ordnung durch Einsetzen der einen Gleichung in die andere ein System zweiter Ordnung erzeugen. Lösen Sie die resultierende ODE zweiter Ordnung dann mit Hilfe des charakteristischen Polynoms. Vergleichen Sie die beiden Lösungen. Die Ergebnisse sollten übereinstimmen.

Lösung 1:

$$y' - \frac{y}{x^2} = \mathrm{e}^y \qquad \underline{\quad D \quad} \qquad y' = x^2\, y + \mathrm{e}^{1-y} \qquad \underline{\quad B \quad}$$

$$y' - \mathrm{e}^y - x^2\, y = 0 \qquad \underline{\quad A \quad} \qquad y' = x^2\, y + \mathrm{e}^{\frac{1}{y}} \qquad \underline{\quad C \quad}$$

Lösung 2:



Lösung 3:

(a) "Trennung der Variablen"

(i)

$$
\begin{aligned}
& y' - \ln x\, y = 0 && \Leftrightarrow && \frac{dy}{dx} = \ln x\, y \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{y}\, dy = \ln x\, dx && \Rightarrow && \int \frac{1}{y}\, dy = \int \ln x\, dx \\
\Rightarrow\quad & \ln y = x\,(\ln x - 1) + \tilde{C} && \Leftrightarrow &&
\end{aligned}
$$

$$\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{x\,(\ln x - 1)}}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
&& \frac{dy}{dx} &= 1 \cdot \sin y \\
\Leftrightarrow && \frac{1}{\sin y}\, dy &= 1\, dx \\
\Rightarrow && \int \frac{1}{\sin y}\, dy &= \int 1\, dx \\
\Leftrightarrow && \ln\left(\tan \frac{y}{2}\right) &= x + \tilde{C} \\
\Leftrightarrow && \tan \frac{y}{2} &= C\,\mathrm{e}^{x} \\
\Leftrightarrow && \tan \frac{y}{2} &= C\,\mathrm{e}^{x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{y(x) = 2 \arctan\left(C\,\mathrm{e}^{x}\right)}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
&& x\,y' &= y + \sqrt{x^2 + y^2} \\
\Leftrightarrow && y' &= \frac{y}{x} + \sqrt{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}
\end{aligned}$$

Mit $w = \frac{y}{x}$ gilt $y' = w'\,x + w$ und damit folgt

$$\begin{aligned}
&& w'\,x &= \sqrt{1 + w^2} \\
\Leftrightarrow && \frac{dw}{dx} &= \frac{1}{x}\sqrt{1 + w^2} \\
\Rightarrow && \int \frac{1}{\sqrt{1 + w^2}}\, dw &= \int \frac{1}{x}\, dx \\
\Rightarrow && \operatorname{asinh} w &= \ln x + \tilde{C} = \ln(x \underbrace{\mathrm{e}^{\tilde{C}}}_{=:C}) \\
&& &= \ln(C\,x) \\
\Leftrightarrow && w &= \sinh(\ln(C\,x)) \\
&& &= \frac{1}{2}\left(C\,x - \frac{1}{C\,x}\right)
\end{aligned}$$

Rücksubstitution führt dann auf

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\left(C\,x^2 - \frac{1}{C}\right)}$$

(b) (i) partikulärer Lösung (konstante Koeffizienten)

$$y' - 42\,y = x^3 + 1$$

Lösung der homogenen ODE:

$$y_0 = C\,\mathrm{e}^{42\,x}$$

Ansatz für die partikuläre Lösung:

$$y_p = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$$

eingesetzt in die inhomogene ODE und Koeffizientenvergleich liefern die Koeffizienten

$$a_3 = \frac{-1}{42}\,, \quad a_2 = \frac{-3}{42^2}\,, \quad a_1 = \frac{-6}{42^3} \quad \text{und} \quad a_0 = \frac{-(6+42^2)}{42^4}\,.$$

Die Lösungen insgesamt ergeben sich dann aus der Summe von y_0 und y_p:

$$\boxed{y(x) = C\,\mathrm{e}^{42\,x} - \frac{1}{42}\,x^3 - \frac{3}{42^2}\,x^2 - \frac{6}{42^3}\,x - \frac{1770}{42^4}}$$

(ii) Variation der Konstanten (nicht konstante Koeffizienten)

$$y' - 3\,x^2\,y = \mathrm{e}^{x^3+1}$$

Lösung der homogenen Gleichung:

$$y_0(x) = C\,\mathrm{e}^{x^3}$$

Ansatz der Lösung der inhomogenen Gleichung über Varaition der Konstanten:

$$y(x) = C(x)\,\mathrm{e}^{x^3}$$

Eingesetzt in die ODE liefert:

$$C'(x) = \mathrm{e} \quad \Leftrightarrow \quad C(x) = \mathrm{e}\,x + \tilde{C}$$

Und führt insgesamt auf die Lösung

$$\boxed{y(x) = (\mathrm{e}\,x + \tilde{C})\,\mathrm{e}^{x^3} = \tilde{C}\,\mathrm{e}^{x^3} + x\,\mathrm{e}^{x^3+1}}$$

(c) Lösen Sie das AWP

$$\alpha\,y' + \beta\,y = g(x,y)\,, \quad y(0) = 1$$

mit α, β und $g(x,y)$ aus den vorherigen Aufgabenteilen dieser Aufgabe.

(a) (i) $\alpha = 1$, $\beta = -\ln x$, $g(x,y) = 0$, Lösung:

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{x\,(\ln x - 1)}$$

Dummerweise müssen wir hier in die Definitionslücke des Logarithmus. Schauen wir doch mal was der Limes davon hält:

$$\lim_{x\to 0} y(x) = \lim_{x\to 0} C\,\mathrm{e}^{x\,(\ln x - 1)} = C \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1$$

prima! Das hat geklappt. Damit erhalten wir die Lösung des AWPs

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{x\,(\ln x - 1)}}$$

(ii) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $g(x,y) = \sin y$, Lösung:

$$y(x) = 2\arctan\left(C\,\mathrm{e}^{x}\right)$$

AW:

$$y(0) = 2\arctan C \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \tan\frac{1}{2} \approx 0.55$$

Damit erhalten wir die Lösung

$$\boxed{y(x) = 2\arctan\left(\mathrm{e}^{x}\,\tan\frac{1}{2}\right)}$$

(iii) $\alpha = x$, $\beta = -1$, $g(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{2}\left(C\,x^2 - \frac{1}{C}\right)$$

AW:

$$y(0) = \frac{-1}{2\,C} \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{-1}{2}$$

Führt auf die Lösung

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{-x^2}{2} + 2\right)}$$

(b) (i) $\alpha = 1$, $\beta = -42$, $g(x,y) = x^3 + 1$, Lösung:

$$y(x) = C\,\mathrm{e}^{42\,x} - \frac{1}{42}\,x^3 - \frac{3}{42^2}\,x^2 - \frac{6}{42^3}\,x - \frac{1770}{42^4}$$

AW:

$$y(0) = C - \frac{1770}{42^4} \overset{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{3'113'466}{42^4} = \frac{518'911}{518'616} \approx 9.994 \cdot 10^{-1}$$

Ergibt die Lösung

$$\boxed{y(x) = \frac{518'911}{518'616}\,\mathrm{e}^{42\,x} - \frac{1}{42}\,x^3 - \frac{3}{42^2}\,x^2 - \frac{6}{42^3}\,x - \frac{1770}{42^4}}$$

(ii) $\alpha = 1$, $\beta = -3\,x^2$, $g(x,y) = \mathrm{e}^{x^3+1}$, Lösung:

$$y(x) = (\mathrm{e}\,x + \tilde{C})\,\mathrm{e}^{x^3} = \tilde{C}\,\mathrm{e}^{x^3} + x\,\mathrm{e}^{x^3+1}$$

AW:

$$y(0) = C \stackrel{!}{=} 1 \quad \Leftrightarrow \quad C = 1$$

Führt auf die Lösung

$$\boxed{y(x) = \mathrm{e}^{x^3} + x\,\mathrm{e}^{x^3+1}}$$

Lösung 4:

Charakteristisches Polynom zur homogenen ODE:

$$p(x) = x^3 - 3\,x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{1, -2\}$$

Damit erhalten wir die Lösungen der homogenen Gleichungen:

$$y_0(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{-2\,x}$$

Als Ansatz für die partikuläre Lösung wählen wir

$$y_p(x) = a\,x + b\,.$$

Diese setzen wir in die inhomogene Gleichung ein und erhalten aus dem Koeffizientenvergleich die Parameter

$$a = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad b = \frac{3}{4}\,.$$

Dies führt und insgesamt auf die Lösungsmenge der inhomogenen Gleichung

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x + C_3\,\mathrm{e}^{-2\,x} + \frac{1}{2}\,x + \frac{3}{4}\,.$$

Jetzt noch die Rand- und Anfangswerte berücksichtigen:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 + C_3 = \frac{13}{4} \\ y'(0) &= C_1 + C_2 - 2\,C_3 = 0 \\ y(1) &= C_1\,\mathrm{e} + C_2\,\mathrm{e} + C_3\mathrm{e}^{-2} = \frac{9}{4} \end{aligned}$$

führt auf die Konstanten

$$C_3 = \frac{9}{4\,(2\,\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-2})}\,,\ C_1 = \frac{1}{4}\left(13 - \frac{9}{2\,\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-2}}\right) \quad \text{und} \quad C_2 = \frac{1}{4}\left(\frac{27}{2\,\mathrm{e} + \mathrm{e}^{-2}} - 13\right)$$

Damit erhalten wir insgesamt die Lösung:

$$
\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{4}\left(\left(13-\frac{9}{2\,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-2}}\right)\,\mathrm{e}^{x}+\left(\frac{27}{2\,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-2}}-13\right)\,x\,\mathrm{e}^{x}+\frac{9}{(2\,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-2})}\,\mathrm{e}^{-2\,x}+2\,x+3\right)\\
&= \frac{9}{4\,(2\,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-2})}\,\left(\mathrm{e}^{-2\,x}+(3\,x-1)\,\mathrm{e}^{x}\right)+13\,(1-x)\,\mathrm{e}^{x}+2\,x+3
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{y(x)=\frac{9}{4\,(2\,\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-2})}\,\left(\mathrm{e}^{-2\,x}+(3\,x-1)\,\mathrm{e}^{x}\right)+13\,(1-x)\,\mathrm{e}^{x}+2\,x+3}
$$

Lösung 5:

(a)

$$
\begin{aligned}
u' &= \alpha\,u+\beta\,v\\
v' &= \gamma\,u+\delta\,v
\end{aligned}
\tag{2}
$$

(i) (2) $\Leftrightarrow$

$$
\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

(ii)

$$
\begin{aligned}
& (\alpha-\lambda)(1-\lambda)-\beta=0\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda^2-(1+\alpha)\lambda+\alpha-\beta=0\\
\Leftrightarrow\quad & \lambda_{1,2}=\frac{(1+\alpha)\pm\sqrt{(1+\alpha)^2-4\,(\alpha-\beta)}}{2}
\end{aligned}
$$

reelle EWe für

$$
\begin{aligned}
& (1+\alpha)^2-4\,(\alpha-\beta)\geq 0\\
\Leftrightarrow\quad & \alpha^2-2\,\alpha+1+4\,\beta\geq 0\\
\Leftrightarrow\quad & (\alpha-1)^2\geq -4\,\beta\\
\Leftrightarrow\quad & |\alpha-1|\geq 2\,\sqrt{-\beta}
\end{aligned}
$$

Damit $\alpha\in\mathbb{R}$ ist muss $\beta\leq 0$ sein.

$$
\begin{aligned}
\beta=0 \quad & \Rightarrow \quad \alpha\in\mathbb{R}\\
\beta<0 \quad & \Rightarrow \quad \alpha\in\mathbb{R}\setminus\left(1-2\sqrt{-\beta},1+2\sqrt{-\beta}\right)
\end{aligned}
$$

Um also reelle EWe zu erhalten, muss für $\alpha\,\beta \in \mathbb{R}$ gelten

$$\boxed{\beta \in \mathbb{R}_0^- \quad \wedge \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \left(1 - 2\sqrt{-\beta}, 1 + 2\sqrt{-\beta}\right)}$$

(iii) Es sei $\alpha = -2$ und $\beta = -1$, dann hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die EWe und zugehörigen EVen

$$\lambda \in \{-1.62, 0.62\}\,,\ v \in \left\{ \begin{pmatrix} -0.93 \\ 0.36 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.93 \end{pmatrix} \right\}$$

führen auf die Lösung (Formel 7, Kapitel 1.3)

$$w(t) = C_1\, v_1\, \mathrm{e}^{\lambda_1 t} + C_2\, v_2\, \mathrm{e}^{\lambda_2 t}\,,$$

genauer

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= -0.93\, C_1\, \mathrm{e}^{-1.62\, t} + 0.36\, C_2\, \mathrm{e}^{0.62\, t} \\ v(t) &= 0.36\, C_1\, \mathrm{e}^{-1.62\, t} - 0.93\, C_2\, \mathrm{e}^{0.62\, t} \end{aligned}}$$

(iv) Es sei $\alpha = 3$ und $\beta = -1$, dann hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die EWe und zugehörigen EVen

$$\lambda = 2\,,\ v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bei EWen mit Vfh>1 wählen wir den Ansatz (Beispiel 24, Kapitel 1.3)

$$\begin{aligned} u(t) &= (C_1 + C_2\, t)\, \mathrm{e}^{2\, t} \\ v(t) &= (C_3 + C_4\, t)\, \mathrm{e}^{2\, t} \end{aligned}$$

Zwei Parameter bestimmen wie so, dass das System (2) erfüllt ist. Das führt zunächst auf

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= C_1\, \mathrm{e}^{2\, t} \\ v(t) &= C_3\, (1 + 2\, t)\, \mathrm{e}^{2\, t}\,. \end{aligned}}$$

Die anderen zwei bleiben für etwaige AWe.

(b) Berechnen Sie die partikuläre Lösung von (1) mit $\gamma = \delta = 1$, α und β beliebig, und den Störfunktionen

(i) $g = 2\,x$ und $p = x + 1$.

Beide Störfunktionen sind von der Art "lineare Funktion". Wir setzen daher beide partikulären Lösungen entsprechend linear an:

$$u_p = a\,x + b \quad \text{und} \quad v_p = c\,x + d$$

Diese setzen wie in das System (1) ein und erhalten

$$\begin{aligned} a &= \alpha\,a\,x + \alpha\,b + \beta\,c\,x + \beta + 2x \\ c &= a\,x + b + c\,x + d + x + 1 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich führt auf

$$\begin{aligned} a - \alpha\,b - \beta\,d &= 0 \\ \alpha\,a + \beta\,c &= -2 \\ c - b - d &= 1 \\ a + c &= -1 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Koeffizienten

$$a = \frac{\beta - 2}{\alpha - \beta} \qquad\qquad c = \frac{2 - \alpha}{\alpha - \beta}$$

und

$$b = -\frac{\beta^2 + \beta\,(1 - 2\,\alpha) + 2}{(\alpha - \beta)^2} \qquad\qquad d = -\frac{2\,\alpha^2 - \alpha\,(2 + \beta) + \beta - 2}{(\alpha - \beta)^2}\,,$$

was insgesamt auf die partikulären Lösungen

$$\boxed{\begin{aligned} u_p &= \frac{\beta - 2}{\alpha - \beta}\,x - \frac{\beta^2 + \beta\,(1 - 2\,\alpha) + 2}{(\alpha - \beta)^2} \\ v_p &= \frac{2 - \alpha}{\alpha - \beta}\,x - \frac{2\,\alpha^2 - \alpha\,(2 + \beta) + \beta - 2}{(\alpha - \beta)^2} \end{aligned}}$$

führt.

(ii) $g(x) = x$ und $p(x) = e^{2x}$, $\alpha = 3$, $\beta = -1$. Wir haben es hier mit zwei Typen von Störfunktion zu tun, die aber durch die Kopplung der Systeme beide Lösungen betreffen. Wir müssen also für beide partikulären Lösungen die Summe aus linearer und Exponentialfunktion ansetzen:

$$u_p = a\,x + b + c\,e^{2x} \quad \text{und} \quad v_p = d\,x + h + k\,e^{2x}$$

Diese in (1) mit den entsprechenden Koeffizienten in A eingesetzt führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned}(a - 3\,b + h) + e^{2x}\,(k - c) &= x\,(3\,a - d)\\ (d - b - h) + e^{2x}\,(k - c) &= x\,(a + d)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert

$$a = d = b = h = 0 \quad \text{und} \quad k = c \quad \text{beliebig, etwa } 1$$

Das führt insgesamt auf

$$\boxed{\begin{aligned}u_p &= e^{2x}\\ v_p &= e^{2x}\end{aligned}}$$

(c)

$$\begin{aligned}u' &= -2\,u - v\\ v' &= u + v \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad u = v' - v\end{aligned}$$

eingesetzt in die erste Gleichung

$$\begin{aligned}\Rightarrow \qquad v'' - v' &= -2\,(v' - v) - v\\ \Leftrightarrow \qquad v'' + v' - v &= 0 \qquad .\end{aligned}$$

Das charakteristische Polynom

$$p(x) = x^2 + x - 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}$$

hat die Nullstellen

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\,.$$

Damit ergeben sich die Lösungen für v aus

$$v(x) = C_1\,e^{\overbrace{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}^{\approx 0.62}x} + C_1\,e^{\overbrace{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{\approx -1.62}x}\,.$$

Und u erhalten wir durch den Zusammenhang $u = v' - v$, also

$$u(x) = C_1 \underbrace{\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} - 1\right)}_{\approx -0.38} \mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\,x} + C_1 \underbrace{\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2} - 1\right)}_{\approx -2.62} \mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\,x}$$

Insgesamt also

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= -0.38\, C_1\, \mathrm{e}^{0.62\,x} - 2.62\, C_2\, \mathrm{e}^{-1.62\,x} \\ v(x) &= C_1\, \mathrm{e}^{0.62\,x} + C_2\, \mathrm{e}^{-1.62\,x} \end{aligned}}$$

Vergelich zur Lösung: Das Ergebnis ist - abgesehen von Rundungsfehlern - das Gleiche, denn die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -0.38 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.93 \end{pmatrix}$$

sind linear abhängig.