Blatt 4: Laplace-Transformation MAE 3

Aufgabe 1:

Berechnen Sie das Problem aus Beispiel 24 der Vorlesung, nämlich

$$\begin{aligned} u' &= 3\,u - 4\,v & \qquad u(0) &= 3 \\ v' &= u - v & \qquad v(0) &= 1\,, \end{aligned}$$

indem Sie in der 2. Gln nach v auflösen und das Ergebnis in die ersten Gleichung einsetzen. Sie erhalten dann eine Dgl 2. Ordnung für v. Diese lösen Sie mit dem charakteristischen Polynom. Folglich können Sie auch die Lösng u berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem der Voresung. Es sollte übereinstimmen.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die mit Hilfe der Laplace-Transformation die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'' - 2\,u = 1$$

Aufgabe 3:

Es ist die sogenannte Heavyside-Funktion H gegeben durch

$$H(t) := \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

Berechnen Sie die Laplace-Transformierte von

(a) der Heavyside-Funktion $H(t-a)$,

(b) der Rechteckfunktion $H(t-a) - H(t-b)$ und

(c) der Rechteckschwingung $W_\infty(t)$ mit

$$W_\infty(t) = H(t) - 2\,H(t-a) + 2\,H(t-2\,a) - 2\,H(t-3\,a) + \cdots$$

(d) Fertigen Sie zu den Funktionen in (a) bis (c) Skizzen an.

Lösung 1:

aus der 2. Gln lesen wir

$$\begin{aligned} & u = v' + v \\ \Rightarrow \qquad & u' = v'' + v' \end{aligned}$$

eingesetzt in die erste Gln erhalten wir

$$v'' - 2\,v' + v = 0$$

über charakteristisches Polynom (Nullstelle $\lambda = 1$ mit Vfh 2) errechnen wir die Lösungen

$$v(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x\,\mathrm{e}^x$$

deren Ableitung ist gegeben durch

$$v'(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,(1+x)\,\mathrm{e}^x$$

Wir ermitteln die Konstanten über die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} v(0) &= C_1 = 1 && \Rightarrow\; C_1 = 1 \\ u(0) &= v'(0) + v(0) = 2 + C_2 = 3 && \Rightarrow\; C_2 = 1\,. \end{aligned}$$

Damit kennen wir v genau

$$v(x) = (1+x)\,\mathrm{e}^x$$

und können auch u bestimmen

$$\begin{aligned} u(x) &= v'(x) + v(x) \\ &= (3 + 2\,x)\,\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Lösung 2:

Es ist zunächst

$$\mathcal{L}\{1\}(s) = \lim_{b\to\infty} \int\limits_0^b \mathrm{e}^{-s\,t}\,dt = \lim_{b\to\infty} \frac{-1}{s}\mathrm{e}^{-s\,t}\Big|_0^b = \frac{1}{s}\,.$$

Die Gleichung transformiert sich insgesamt zu

$$\mathcal{L}\{u''\}(s) - 2\,\mathcal{L}\{u\}(s) = \frac{1}{s}$$

also

$$s^2\mathcal{L}\{u\}(s) - su_0 - d_0 - 2\,\mathcal{L}\{u\}(s) = \frac{1}{s}$$

was äquivalent ist zu

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{u\}(s) &= \frac{\frac{1}{s} + su_0 + d_0}{s^2-2} = \frac{1}{s(s^2-2)} + u_0\,\frac{s}{s^2-2} + d_0\,\frac{1}{s^2-2}\\ &= \frac{-1}{2}\frac{1}{s} + \frac{1}{4}\frac{1}{s-\sqrt{2}} + \frac{1}{4}\frac{1}{s+\sqrt{2}} + u_0\,\frac{s}{s^2-2} + d_0\,\frac{1}{s^2-2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{s} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; 1\\ \frac{1}{s-\sqrt{2}} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \mathrm{e}^{\sqrt{2}\,t}\\ \frac{1}{s+\sqrt{2}} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,t}\\ \frac{s}{s^2-2} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \cosh(\sqrt{2}\,t) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,t}\right)\\ \frac{1}{s^2-2} &\;\bullet\!\!-\!\!\circ\; \frac{1}{\sqrt{2}}\sinh(\sqrt{2}\,t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,t}\right)\end{aligned}$$

Insgesamt führt das dann auf

$$\begin{aligned}u &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,t} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,t} + u_0\,\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,t} + \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,t}\right) + d_0\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,t} - \mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,t}\right)\\ &= \frac{1 + 2\,u_0 + \sqrt{2}\,d_0}{4}\,\mathrm{e}^{\sqrt{2}\,t} + \frac{1 + 2\,u_0 - \sqrt{2}\,d_0}{4}\,\mathrm{e}^{-\sqrt{2}\,t} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Lösung 3:

(a)

$$\mathcal{L}\{H(t-a)\}(s) = \frac{1}{s}\,\mathrm{e}^{-a\,s}$$

(b)

$$\mathcal{L}\{H(t-a) - H(t-b)\}(s) = \frac{1}{s}\left(\mathrm{e}^{-a\,s} - \mathrm{e}^{-b\,s}\right)$$

(c)

$$\mathcal{L}\{W_\infty\}(s) = \frac{1}{s}\frac{1-\mathrm{e}^{-a\,s}}{1+\mathrm{e}^{-a\,s}}\,,\ s>0$$

(d) Skizzen: