DGL höherer Ordnung und Systeme von DGL MAE 3

Aufgabe 1:

Prüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob folgende Mengen von Funktionen linear abhängig sind.

(a)
$$\left\{ \mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x} \right\}$$

(b)
$$\{\cosh x, \mathrm{e}^{x}\}$$

(c)
$$\left\{ \cosh x, \mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x} \right\}$$

(d)
$$\{\cosh x, \sinh x\}$$

(e)
$$\{\tan x, \sin x, \cos x\}$$

Aufgabe 2:

Von der Differentialgleichung
$$y'' + p \cdot y' + 4\,y = 3$$
kennt man eine Lösung
$$y(x) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,x} + \frac{3}{4}\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter p.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

(c) Bestimmen Sie die Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(d) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} y(x)$ für die in (c) gefundene Lösung.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$\dot{y} + (2 - t)\,y = g(t)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und der Störfunktion

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ t-2 & t > 2 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie die stetige Lösung $y(t)$ zur gegebenen Anfangsbedingung.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst für beide Äste der Störfunktion $g(t)$ die allgemeine Lösung der DGL und bestimmen Sie die beiden Konstanten, so dass Anfangsbedingung und Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion erfüllt ist.

Aufgabe 4:

(a) Lösen Sie das AWP

$$\begin{aligned} u' &= 4\,u + v & \qquad u(0) &= 0 \\ v' &= -2\,u + v & \qquad v(0) &= 1 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{aligned} u' &= 4\,u + v - 36\,x \\ v' &= -2\,u + v - 2\,\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$