Blatt 3: DGL höherer Ordnung und Systeme von DGL MAE 3

Aufgabe 1:

Prüfen Sie mit Hilfe der Wronski-Determinante, ob folgende Mengen von Funktionen linear abhängig sind.

(a)
$$\left\{\mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}\right\}$$

(b)
$$\{\cosh x, \mathrm{e}^{x}\}$$

(c)
$$\left\{\cosh x, \mathrm{e}^{x}, \mathrm{e}^{-x}\right\}$$

(d)
$$\{\cosh x, \sinh x\}$$

(e)
$$\{\tan x, \sin x, \cos x\}$$

Aufgabe 2:

Von der Differentialgleichung
$$y'' + p \cdot y' + 4\,y = 3$$
kennt man eine Lösung
$$y(x) = \frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{-2\,x} + \frac{3}{4}\,.$$

(a) Bestimmen Sie den Parameter p.

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung.

(c) Bestimmen Sie die Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

(d) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} y(x)$ für die in (c) gefundene Lösung.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Differentialgleichung
$$\dot{y} + (2 - t)\,y = g(t)$$

mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ und der Störfunktion

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 2 \\ t-2 & t > 2 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie die stetige Lösung $y(t)$ zur gegebenen Anfangsbedingung.

Tipp: Bestimmen Sie zunächst für beide Äste der Störfunktion $g(t)$ die allgemeine Lösung der DGL und bestimmen Sie die beiden Konstanten, so dass Anfangsbedingung und Stetigkeit der zusammengesetzten Funktion erfüllt ist.

Aufgabe 4:

(a) Lösen Sie das AWP

$$\begin{aligned} u' &= 4\,u + v & \qquad u(0) &= 0 \\ v' &= -2\,u + v & \qquad v(0) &= 1 \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des inhomogenen Systems

$$\begin{aligned} u' &= 4\,u + v - 36\,x \\ v' &= -2\,u + v - 2\,\mathrm{e}^x \end{aligned}$$

Lösung 1:

(a) lu

(b) lu

(c) la

(d) lu

(e) lu

Lösung 2:

(a)

$$p = 4$$

(b)

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2\,x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-2\,x} + \frac{3}{4}$$

(c)

$$y(x) = \frac{3}{4}\,\left(1 - (1 + 2\,x)\,\mathrm{e}^{-2\,x}\right)$$

(d)

$$\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{4}\,\left(1 - (1 + 2\,x)\,\mathrm{e}^{-2\,x}\right) = \frac{3}{4}$$

Lösung 3:

Allgemeine Lösung der homogenen DGL:

$$y_0 = C\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t-2)^2}$$

Partikuläre Lösung:

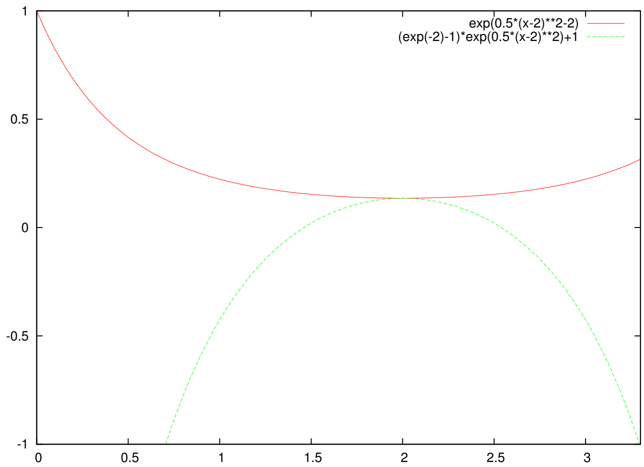
$$y_p = \begin{cases} 0 & t \le 2 \\ -1 & t > 2 \end{cases}$$

Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL:

$$y = \begin{cases} C_1\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t^2-4\,t)} & t \le 2 \\ C_2\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t-2)^2} - 1 & t > 2 \end{cases}$$

Anfangsbedingung $y(0) = 1$: Führt auf $C_1 = 1$ und die geforderte Stetigkeit liefert $C_2 = 1 + \mathrm{e}^{-2}$. $\Rightarrow$ Lösung des AWPs:

$$y = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t^2 - 4\,t)} & t \leq 2 \\ (\mathrm{e}^{-2} + 1)\,\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(t-2)^2} - 1 & t > 2 \end{cases}$$



Lösung 4:

(a)

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenwerte:

$$\lambda_1 = 3\,, \ \lambda_2 = 2$$

Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Allgemeine Lösung:

$$\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3\,x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2\,x} \tag{1}$$

Anfangswerte einbringen:

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathrm{e}^{3\,x} - \mathrm{e}^{2\,x} \\ v(x) &= 2\,\mathrm{e}^{2\,x} - \mathrm{e}^{3\,x} \end{aligned}$$

(b) Allgemeine Lösung des homogenen Systems aus (1):

$$\begin{aligned} u_0(x) &= C_1\,\mathrm{e}^{3\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ v_0(x) &= -C_1\,\mathrm{e}^{3\,x} - 2\,C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} \end{aligned} \tag{2}$$

Variation der Konstanten liefert Ansatz der gesuchten Lösung:

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1(x)\,\mathrm{e}^{3\,x} + C_2(x)\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ v(x) &= -C_1(x)\,\mathrm{e}^{3\,x} - 2\,C_2(x)\,\mathrm{e}^{2\,x} \end{aligned}$$

Einsetzen in das System liefert:

$$\begin{aligned} C_1'\,\mathrm{e}^{3\,x} + C_2'\mathrm{e}^{2\,x} &= -36\,x \\ C_1'\,\mathrm{e}^{3\,x} + 2\,C_2'\mathrm{e}^{2\,x} &= 2\,\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

mit der Lösung

$$C_1'(x) = -72\,x\,\mathrm{e}^{-3\,x} - 2\,\mathrm{e}^{-2\,x}\,,\; C_2'(x) = 36\,x\,\mathrm{e}^{-2\,x} + 2\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

Die unbestimmten Integrale lauten

$$C_1(x) = 24\,x\,\mathrm{e}^{-3\,x} + 8\,\mathrm{e}^{-3\,x} + \mathrm{e}^{-2\,x} + \tilde{C}_1\,,\; C_2(x) = -18\,x\,\mathrm{e}^{-2\,x} - 9\,\mathrm{e}^{-2\,x} - 2\,\mathrm{e}^{-x} + \tilde{C}_2$$

Insgesamt erhalten wir dann die Lösungen

$$\begin{aligned} u(x) &= 24\,x + 8 + \mathrm{e}^{x} + \tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{3\,x} - 18\,x - 9 - 2\,\mathrm{e}^{x} + \tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ &= \tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{3\,x} + \tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + 6\,x - 1 - \mathrm{e}^{x} \\ v(x) &= -24\,x - 8 - \mathrm{e}^{x} - \tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{3\,x} + 36\,x + 18 + 4\,\mathrm{e}^{x} - 2\,\tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{2\,x} \\ &= -\tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{3\,x} - 2\,\tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + 12\,x + 10 + 3\,\mathrm{e}^{x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(x) &= \tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{3\,x} + \tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + 6\,x - 1 - \mathrm{e}^{x} \\ v(x) &= -\tilde{C}_1\,\mathrm{e}^{3\,x} - 2\,\tilde{C}_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + 12\,x + 10 + 3\,\mathrm{e}^{x} \end{aligned}}$$

Variante: Partikulärlösung

Die Lösung des homogenen Systems ist ja mit (2) schon vorhanden. Die Ansätze für die partikulären Lösungen stellen sich zusammen als Summe der Störfunktionen beider Gleichungen. Das ist deshalb der Fall, da ja beide Funktionen auch wegen der kopplung in beiden Gleichungen auftreten. Die Ansätze für die partikulären Lösungen lauten:

$$\begin{aligned} u_p(x) &= A\,\mathrm{e}^{x} + B\,x + C \\ v_p(x) &= D\,\mathrm{e}^{x} + E\,x + F \end{aligned}$$

Diese beiden Funktionen setzen wir in das System von ODEs ein:

1. Gln

$$\begin{aligned}
& u_p' = 4\,u_p + v_p - 36\,x \\
\Rightarrow \quad & A\,\mathrm{e}^x + B = 4\,(A\,\mathrm{e}^x + B\,x + C) + D\,\mathrm{e}^x + E\,x + F - 36\,x \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = \mathrm{e}^x\,\underbrace{(3\,A + D)}_{=0} + x\,\underbrace{(4\,B + E - 36)}_{=0} + \underbrace{(4\,C + F - B)}_{=0}
\end{aligned}$$

2. Gln

$$\begin{aligned}
& v_p' = -2\,u_p + v_p - 2\,\mathrm{e}^x \\
\Rightarrow \quad & D\,\mathrm{e}^x + E = -2\,(A\,\mathrm{e}^x + B\,x + C) + (D\,\mathrm{e}^x + E\,x + F) - 2\,\mathrm{e}^x \\
\Leftrightarrow \quad & 0 = -\mathrm{e}^x\,\underbrace{(2 + 2\,A)}_{=0} - x\,\underbrace{(2\,B - E)}_{=0} + \underbrace{F - 2\,C - E}_{=0}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
& A = -1 && \Rightarrow && D = 3 \\
\text{und} \quad & E = 2\,B && \Rightarrow && B = 6 \\
\Rightarrow \quad & E = 12 && && \\
\text{und} \quad & F = 6 - 4\,C && \Rightarrow && C = (F - E)\frac{1}{2} \\
& && && \quad = (6 - 4\,C - 12)\frac{1}{2} \\
& && && \quad = -3 - 2\,C \\
\Rightarrow \quad & C = -1 && \Rightarrow && F = 10
\end{aligned}$$

Das führt auf die partikulären Lösungen:

$$\begin{aligned}
u_p(x) &= -\mathrm{e}^x + 6\,x - 1 \\
v_p(x) &= 3\,\mathrm{e}^x + 12\,x + 10
\end{aligned}$$

Und damit insgesamt auf die Lösungen:

$$\boxed{\begin{aligned}
u(x) &= C_1\,\mathrm{e}^{3\,x} + C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} - \mathrm{e}^x + 6\,x - 1 \\
v(x) &= -C_1\,\mathrm{e}^{3\,x} - 2\,C_2\,\mathrm{e}^{2\,x} + 3\,\mathrm{e}^x + 12\,x + 10
\end{aligned}}$$