School of Engineering
Winterthur
Zürcher Hochschule für Angewandte Wissenschaften

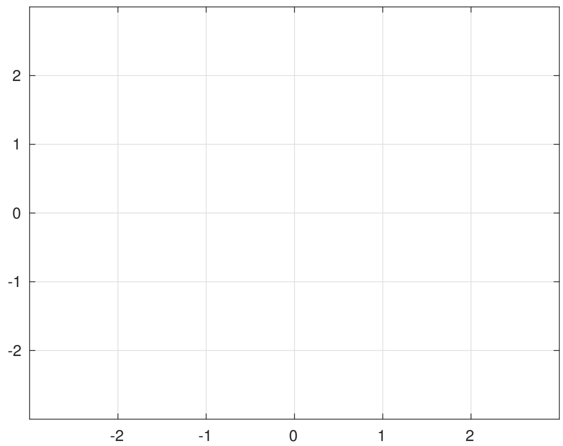
Blatt 1: Gewöhnliche DGL 1. Ordnung — MAE 3

Aufgabe 1:

Zeichnen Sie das Richtungsfeld zur ODE

$$y' = x\,y + y^2$$

auf dem Gebiet $[-2, 2] \times [-2, 2]$ in nebenstehendes Achsenkreuz.



Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Lösungen über Trennung der Variablen. Es gelte allgemein $y(x_0) = y_0$.

$$(a) \qquad y' = y\,\cos x \qquad\qquad (b) \qquad y' = y\,f(x)$$

$$(c) \qquad y' + \frac{1+y^3}{x\,y^2\,(1+x^2)} = 0,\ (x > 0) \qquad\qquad (d) \qquad y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$$

Tipp:

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass

$$(a)\ y = 2\,\mathrm{e}^x \qquad (b)\ y = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x \qquad (c) y = 3\,x$$

Lösungen der Differentialgleichung

$$y''(1-x) + y'x - y = 0$$

sind.

Aufgabe 4:

Bilden Sie eine Differentialgleichung, deren allgemeine Lösung

$$(a)\ y = C\,x^2 - x \qquad (b)\ y = C_1\,x^3 + C_2\,x + C_3$$

ist.

Aufgabe 5:

Berechnen Sie jeweils die Lösungen durch

(a) Variation der Konstanten

$$(i) \qquad y' = 2\,x\,y - \mathrm{e}^{x^2}\,\sin x \qquad\qquad (ii) \qquad y' = y - x$$

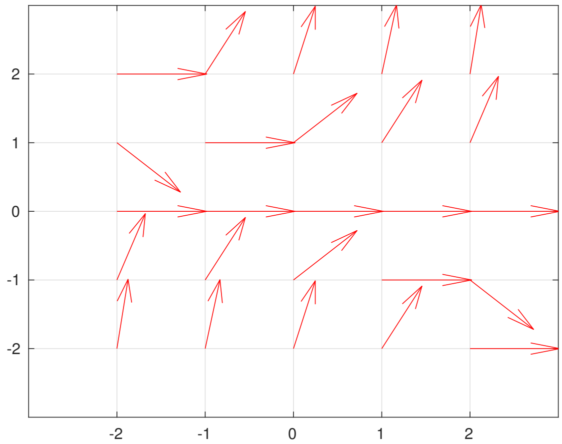
(b) geeignete Substitution

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{2\,x\,y}$$

Tipp: Standardtransformation $y(x) = v(x)x$

Lösung 1:

		x-Werte				
		-2	-1	0	1	2
y-Werte	2	0	2	4	6	8
	1	-1	0	1	2	3
	0	0	0	0	0	0
	-1	3	2	1	0	-1
	-2	8	6	4	2	0

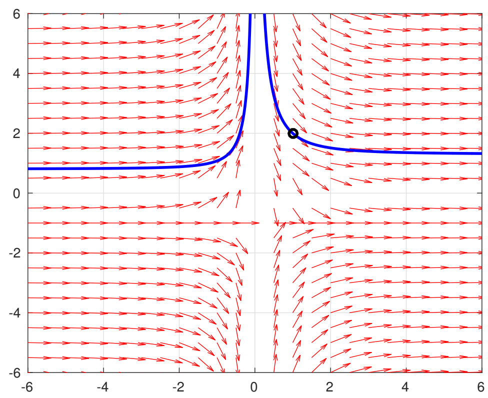


In der Tabelle sind alle Werte von $y' = x\,y + y^2$ für die jeweiligen x- und y-Werte aufgelistet. Diese Werte sind gerade die Steigung der Vektoren im Richtungsfeld. Die Länge der Vektoren haben keine Relevanz.

Lösung 2:

$$(a) \qquad y(x) = C\,\mathrm{e}^{\sin x} \qquad\qquad (b) \qquad y(x) = C\,\mathrm{e}^{\int f(x)\,dx}$$

$$(c) \qquad y(x) = \sqrt[3]{C\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 - 1} \qquad\qquad (d) \qquad y(x) = \tan(\arctan x + C)$$



Richtungsfeld und Lösungskurve von Aufgabe 2c mit Anfangswert (AW): $(x_0, y_0) = (1, 2)$

Lösung 3:

Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung von y und setzen Sie die Werte in die Differentialgleichungen ein.

(a)

$$\begin{aligned} & & y(x) &= 2\,\mathrm{e}^x \\ \Rightarrow & & y'(x) &= 2\,\mathrm{e}^x \\ \Rightarrow & & y''(x) &= 2\,\mathrm{e}^x \\ \Rightarrow & & y''(1-x) + y'x - y &= 2\,\mathrm{e}^x(1-x) + 2\,\mathrm{e}^x\,x - 2\,\mathrm{e}^x = 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} & & y(x) &= C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,x \\ \Rightarrow & & y'(x) &= C_1\,\mathrm{e}^x + C_2 \\ \Rightarrow & & y''(x) &= C_1\,\mathrm{e}^x \\ \Rightarrow & & y''(1-x) + y'x - y &= C_1\,\mathrm{e}^x\,(1-x) + (C_1\,\mathrm{e}^x + C_2)\,x - C_1\,\mathrm{e}^x - C_2\,x = 0 \quad \checkmark \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} & & y(x) &= 3\,x \\ \Rightarrow & & y'(x) &= 3 \\ \Rightarrow & & y''(x) &= 0 \\ \Rightarrow & & y''(1-x) + y'x - y &= 3\,x - 3\,x = 0 = 0 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Lösung 4:

Berechnen Sie die Ableitungen von y und finden Sie Zusammenhänge. Die Anzahl der benötigten Ableitungen entspricht der Anzahl der Konstanten!

(a)

$$\begin{aligned} y(x) &= C\,x^2 - x = x\,(C\,x - 1) \\ y'(x) &= C\,2\,x - 1 = 2\,(C\,x - 1) + 1 \end{aligned}$$

Die Funktion erfüllt die Dgl

$$y' = 2\,\frac{y}{x} + 1\,.$$

(b)

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1\,x^3 + C_2\,x + C_3 \\ y'(x) &= C_1 3\;x^2 + C_2 \\ y''(x) &= C_1 6\;x \\ y'''(x) &= C_1 6 \end{aligned}$$

Die Funktion erfüllt die Dgl

$$y'''\,x = y''\,.$$

Lösung 5:

(a)

$$(i) \qquad y(x) = (\cos x + C)\,\mathrm{e}^{x^2} \qquad\qquad (ii) \qquad y(x) = C\,\mathrm{e}^{x} + x + 1$$

(b)

$$y' = \frac{x^2 - y^2}{2\,x\,y}$$

Transformation $\qquad y := v\,x$

$\Rightarrow \qquad v'\,x + v = \dfrac{1 - v^2}{2\,v}$

TV $\qquad -3\,v^2 = x^{-3} - 1$

Rücktr. $\qquad y = \sqrt{\dfrac{1}{3}\left(x^2 - \dfrac{C}{x}\right)}$