Zu

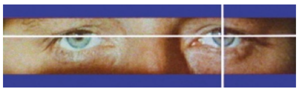
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\,f(x) \qquad\qquad \text{in } I = [0, 1000] \\ f(0) &= 10 \end{aligned}$$

ist

$$f(x) = 10\,\mathrm{e}^{2\,x}$$

die Lösung.

Beispiel 54 Tatort



Ein Pathologe möchte den Todeszeitpunkt eines Mordopfers feststellen. Er misst die Temperatur des Opfers um 12.36 Uhr, sie beträgt 27°C. Nach dem Newtonschen Abkühlungsgesetz ist die Abkühlung eines Körpers proportional zur Differenz von Körpertemperatur und Außentemperatur. Leider kennt der Pathologe die Proportionalitätskonstante nicht. Deshalb misst er die Temperatur um 13.06 Uhr noch einmal und kommt auf 25°C. Die Außentemperatur beträgt 20°C, die Körpertemperatur zum Todes- zeitpunkt wird mit 37°C angesetzt. Wann fand der Mord statt?

Was wissen wir?

1. Newtonschen Abkühlungsgesetz:
   $a =$ Außentemperatur, $\alpha =$ Proportionalitätskonstante.

$$\begin{aligned} f'(t) &= \alpha(f(t) - a) \\ f(t_0) &= f_0\,. \end{aligned}$$

2. t_0 sei der Todezeitpunkt.

Temperatur (°C)	$\cdots$	37	$\cdots$	27	25
Uhrzeit	0:00	?	$\cdots$	12:36	13:06
Zeit (min)	0	t_0	$\cdots$	756	786

$$\begin{aligned} && f'(t) &= \alpha(f(t) - a) \\ \Leftrightarrow && (\underbrace{f(t) - a}_{=:\tilde{f}(t)})' &= \alpha(f(t) - a) \\ \Leftrightarrow && \tilde{f}'(t) &= \alpha\tilde{f}(t) \\ \Rightarrow && \tilde{f}(t) &= C\mathrm{e}^{\alpha\,t} \\ \Rightarrow && f(t) &= C\mathrm{e}^{\alpha\,t} + a \end{aligned}$$

Die Konstante C wird über den Anfangswert $f(t_0) = f_0(= 37)$ bestimmt.

$$\begin{aligned} f_0 = f(t_0) &= C\mathrm{e}^{\alpha t_0} + a \\ \Leftrightarrow \qquad C &= (f_0 - a)\mathrm{e}^{-\alpha t_0} \\ \Rightarrow \qquad f(t) &= (f_0 - a)\mathrm{e}^{\alpha (t-t_0)} + a \end{aligned}$$

Setzen wir unsere Daten ein so erhalten wir

$$\boxed{f(t) = 20 + 17\,\mathrm{e}^{\alpha (t-t_0)}}$$

Wir haben zwei Unbekannte α (Abkühlungsrate) und t_0 (Todeszeitpunkt) und zwei Bedingungen, nämlich $f(756) = 27$ und $f(786) = 25$. Damit erhalten wir zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} 27 &= 20 + 17\,\mathrm{e}^{\alpha(756-t_0)} \\ \Leftrightarrow \qquad \alpha &= \frac{\ln 7 - \ln 17}{756 - t_0} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 25 &= 20 + 17\,\mathrm{e}^{\alpha(736-t_0)} \\ \Leftrightarrow \qquad \alpha &= \frac{\ln 5 - \ln 17}{786 - t_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \frac{\ln 5 - \ln 17}{786 - t_0} &= \frac{\ln 7 - \ln 17}{756 - t_0} \\ \Rightarrow \qquad t_0 &= \frac{786 \ln 7 - 30 \ln 17 - 756 \ln 5}{(\ln 7 - \ln 5)} \\ &\approx 676.89 \end{aligned}$$

Der Mord passierte demnach gegen 11:16.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \qquad \alpha &= \frac{\ln 5 - \ln 17}{786 - t_0} \\ &\approx -0.0112 \end{aligned}$$

Insgesamt kann die Temperaturkurve ab t_0 näherungsweise durch folgende Funktion beschrieben werden:

$$\boxed{f(t) \approx 17\,\mathrm{e}^{-0.0112\,t+7.59} + 20}$$

Wie entwickelt sich die Temperatur im weiteren Verlauf?

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} 17\,\mathrm{e}^{-0.0112\,t+7.59} + 20 = 20$$

Die Temperatur bleibt oberhlab von $20°$C, was gerade der Umgebungstemperatur entspricht.

4.4 Integration II: partielle Integration

In diesem Kapitel geht es nun um die Fragestellung nach Stammfunktionen zu Logarithmus– und Exponentialfunktionen, also um:

Wir starten mit e^x, weil das am einfachsten ist: Wir wissen, dass die Ableitung der natürlichen Exponentialfunktion wieder sie selbst ist. Demzufolge ist sie selbst auch eine ihrer Stammfunktionen. Es ist also leicht einzusehen, dass

$$\int \mathrm{e}^x \; dx = \mathrm{e}^x + C$$

gilt.

Beispiel 55

$$\int \mathrm{e}^{\alpha\, x} \; dx = \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\, x} + C\,,$$

denn

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha\, x} + C\right) = \frac{1}{\alpha}\alpha\mathrm{e}^{\alpha\, x} = \mathrm{e}^{\alpha\, x}\,,$$

was genau dem Integranten entspricht.

Beispiel 56 Die Funktion e^{x^2} besitzt **keine** Stammfunktion.

Die Beispiele 55 und 56 zeigen, dass es keine generelle Regel zur Berechnung einer Stammfunktion zu Verknüpfungen der natürlichen Exponential– mit allgemeinen Funktionen gibt. Jede Situation muss für sich neu ausgeknobelt werden.

Betrachten wir die allgemeine Exponentialfunktion a^x: Wir wissen, dass die Ableitung durch $a^x \ln a$ gegeben ist. Suchen wir also eine Stammfunktion, so müssen wir den Faktor $\ln a$ korrigieren. Es ist demnach

$$\int a^x \; dx = \frac{a^x}{\ln a} + C\,,$$