Blatt 2, Aufgabe 2b

aus Heuser, Aufgabe 9.6, S. 112

$$y' = \sqrt{x+y+1}, \quad y(0) = 1$$

Substitution: $\quad z = x+y+1$

$$\Leftrightarrow \quad y' = z' - 1$$

$$\Rightarrow \quad z' - 1 = \sqrt{z} \quad \Leftrightarrow \quad z' = \sqrt{z} + 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \underbrace{\frac{1}{\sqrt{z}+1}}_{=: I} dz = \int dx = x + C \qquad (*)$$

$$I = \frac{1}{\sqrt{z}+1} = \sqrt{z}\,\frac{\frac{1}{\sqrt{z}}}{\sqrt{z}+1} = \frac{1}{\sqrt{z}} - 2\,\frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}}{\sqrt{z}+1}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{z}+1}\,dz = \int \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz - 2\int \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{z}}}{\sqrt{z}+1}\,dz$$

$$= 2\sqrt{z} - 2\ln(\sqrt{z}+1)$$

Damit erhalten wir insgesamt mit $(*)$

$$2\sqrt{z} - 2\ln(\sqrt{z}+1) = x + C$$

$$\Rightarrow \boxed{2\sqrt{x+y+1} - 2\ln\left(\sqrt{x+y+1}+1\right) - x - C = 0}$$

$y(0) = 1$

$\Rightarrow \quad 2\sqrt{2} - 2\ln(1+\sqrt{2}) = C$

$$\Rightarrow \boxed{\sqrt{x+y+1} - \ln\left(\sqrt{x+y+1} + 1\right) - \frac{1}{2}x = \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2})}$$

Das ist eine nicht lineare Gleichung und kann analytisch nicht weiter gelöst werden.

Möglich wär hier ein Newton-Verfahren (Numerik)