

Blatt 1, Aufgabe 2c

$$y' + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$$

Trennung der Variablen führt auf

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(1+y^3)}{y^2} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{y^2}{1+y^3} dy = \frac{1}{x(1+x^2)} dx$$

Korrektur

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \int \frac{3y^2}{1+y^3} dy = \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx \quad (*)$$

Zähler ist Ableitung  
des Nenners

Partiellbruch-  
zerlegung (PBZ)

PBZ:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{1}{x} = \frac{bx+c}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-1-x^2}{x(1+x^2)} = \frac{bx+c}{1+x^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x}{1+x^2} = \frac{bx+c}{1+x^2} \Rightarrow b = -1 \wedge c = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$(*) \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \ln|1+y^3| = \int \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx$$

$\uparrow$   
 Zähler ist Ableitung  
 von Nenner

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \ln|1+y^3| = \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_1$$

$$\Leftrightarrow \ln|1+y^3| = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{-3} + C_2, C_2 = -3C_1$$

$$\Leftrightarrow 1+y^3 = C_3 \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3, C_3 = e^{C_2}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt[3]{C_3 \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 - 1}$$